

Приложение к журналу

# КВАНТ

№4/94

ШКОЛА  
В «КВАНТЕ»

АЛГЕБРА И АНАЛИЗ

Бюро



Квантум

ШКОЛА  
В «КВАНТЕ» ·

АЛГЕБРА И АНАЛИЗ



---

Москва 1994  
Бюро «Квантум»

УДК 087.5:[512+517]

ББК 22.1

Ш67

ББК 22.1

Приложение  
к журналу «Квант»  
№ 4/94

**Ш67 Школа в «Кванте»: Алгебра и анализ / Под ред.  
А. А. Егорова.— М.: Бюро Квантум, 1994.— 128 с.  
(Прил.-к журналу «Квант» № 4/94)**

Книга представляет собой сборник статей по алгебре и началам анализа, тематика которых либо присутствует в школьной программе, либо близка к ней, но изучается лишь в факультативных курсах или классах с углубленным изучением математики. Во всех статьях изложение предмета вполне автономно и доступно читателям, впервые знакомящимся с ним.

Для учащихся и преподавателей средних школ, лицеев и гимназий, а также для всех, кто интересуется математикой.

**ББК 22.1**

**ISBN 5—85843—008—2**

© Бюро Квантум  
«Квант», 1994

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга, как и предыдущая («Арифметика и алгебра», вышедшая в этом году), представляет собой сборник статей, публиковавшихся в разные годы в журнале «Квант» под рубриками «Школа в «Кванте» и «По страницам школьных учебников». Материалы, вошедшие в эту книгу, близки по тематике к школьному курсу, но зачастую предлагают другие подходы к изучаемым вопросам. В любом случае, надеемся, будет полезно и интересно познакомиться со статьями, собранными под обложкой этого выпуска «Школы в «Кванте».

В дальнейшем мы планируем издание книги, в которую войдут статьи по различным разделам геометрии.

# КАК ВОЗНИКЛО И РАЗВИВАЛОСЬ ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ

*Н. Виленкин*

## У истоков

В те далекие времена, когда люди еще не умели считать, они уже знали, что чем больше оленей удастся убить на охоте, тем дольше племя будет избавлено от голода, чем дольше горит костер, тем теплее будет в пещере. Постепенно, с развитием скотоводства и земледелия, количество известных людям зависимостей увеличилось; например, люди узнали, что урожай увеличивается при увеличении площади поля, настриг шерсти — при увеличении стада овец, а чем больше людей занято в сооружении плотины, тем меньшая часть работы приходится на долю каждого из них.

Взвешивание, измерение длин и объемов и другие аналогичные операции поставили каждой величине в соответствие число — *меру* этой величины при данной единице измерения. Купцам надо было знать *зависимость* меры от выбранной единицы измерения. Они должны были твердо помнить, например, что в одном таланте содержится 60 мин, а потому 3 таланта — это все равно, что 180 мин — хоть меры разные, а величина одна и та же.

В обыденной жизни редко приходилось иметь дело с более сложными соотношениями. Но число разнообразных зависимостей, с которыми приходилось сталкиваться писцам, все время увеличивалось (писцы учитывали поступавшие налоги, определяли запас пищи, потребной войску для похода, количество кирпичей, необходимых для возведения дворца и т. д.). Чтобы обучать писцов, были написаны книги, содержащие решения типичных задач.

Высокого уровня математические знания достигли в Древнем Вавилоне. Для облегчения вычислений вавилоняне составили таблицы обратных значений чисел, квадратов и кубов и даже таблицы для сумм квадратов и кубов числа. Говоря современным языком, это были таблицы функций

$$y = \frac{1}{x}, \quad y = x^2, \quad y = x^3, \quad y = x^2 + x^3.$$

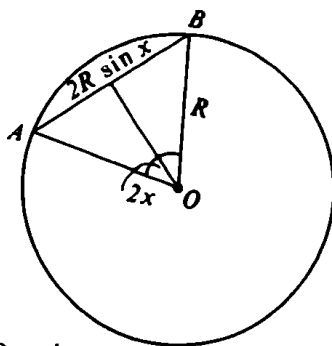


Рис. 1

С помощью таких таблиц можно было решать и обратные задачи: извлекать квадратные и кубические корни, решать квадратные уравнения и т. д. Комбинируя несколько таблиц, вавилоняне находили длину гипотенузы по заданным длинам катетов, т. е. вычисляли значения функции  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ . И хотя путь от появления таблиц до создания общего понятия функции был еще очень велик, первые шаги по этому пути вавилоняне сделали.

Математики Древней Греции старались не выражать величин числами — они знали, что существуют несоизмеримые отрезки, а понятия иррационального числа у них не было. Но все же многие их исследования оказались весьма полезными, когда через два тысячелетия стало формироваться общее понятие функции: они изучили много кривых (эллипс, гиперболу, параболу, различные спирали и улитки и т. д.), исследовали некоторые задачи на наибольшее и наименьшее значения, открыли взаимоотношения между длинами отрезков хорд и диаметров. Особенно важными были результаты греческих астрономов, заложивших основы новой области математики — тригонометрии. Они составили таблицы зависимости между величиной дуги и длиной стягивающей ее хорды. По сути дела то были таблицы функции  $y = \sin x$  — ведь длина хорды, стягивающей дугу в  $2x$  (градусов), равна  $2R \sin x$ , где  $R$  — радиус круга (см. рис. 1). При их вычислении использовалась зависимость между длинами диагоналей вписанного четырехугольника и длинами его сторон (теорема Птолемея\*).

После падения Римской империи (последняя четверть V в. н. э.) и распространения христианства, отрицавшего

\* В каждом вписанном выпуклом четырехугольнике сумма произведений противоположных сторон равна произведению его диагоналей.

языческую науку и философию, центр научных исследований постепенно переместился в арабские страны. Ученые этих стран ввели новые тригонометрические функции и усовершенствовали таблицы хорд.

Исследование же общих зависимостей между величинами начал в XIV веке французский ученый Николай Оресм. В его рукописях есть рисунки, напоминающие современные графики функций. Он даже пытался классифицировать эти графики. Однако продвинуться дальше ему помешало отсутствие общей алгебраической символики. Лишь после того, как в течение XVI века были развиты начала буквенной алгебры (Франсуа Виет), удалось сделать дальнейшие шаги.

## Математика переменных величин

В XVI—XVII веках техника, промышленность, мореходство поставили задачи, недоступные для математики древности, имевшей дело лишь с неподвижными объектами, с постоянными величинами.

В то же время стало распространяться убеждение, что мир управляется законами природы, которые можно познать. Для формулирования этих законов и решения поставленных задач нужны были новые математические методы.

Одним из первых над созданием новых методов познания мира задумался основатель динамики Галилео Галилей. Он размышлял о том, как меняется скорость падающего тела, по какому закону происходит колебание маятника, как движется точка, расположенная на ободе катящегося колеса.

Чтобы описать физические законы движения математически, нужно было ввести понятие *переменной* величины. Это сделал французский философ и математик Рене Декарт, живший в конце XVI и первой половине XVII века.

Для записи зависимостей между величинами Декарт применял буквы, а отношения между неизвестными и известными величинами выражал в виде уравнений.

Выбрав определенные единицы измерения, можно выразить все изучаемые величины числами. Следовательно, зависимость между величинами переходит в зависимость между числами. Например, если выбрать в качестве единиц для измерения расстояний и промежутков времени метр и секунду, то зависимость пути, пройденного телом при свободном падении, от времени выразится формулой  $s = \frac{1}{2}gt^2$ , где  $g=9,81$ . При

изменении числа  $t$  меняется число  $s$ , а потому эта формула связывает друг с другом *числовые переменные*  $t$  и  $s$ .

Однако в течение долгого времени избегали говорить о числовых переменных, а вместо них говорили о переменных величинах. Чтобы отличить переменные величины, рассматриваемые в математике, от тех, которые изучает физика (расстояний, промежутков времени, скоростей и т. д.), делали оговорку, что речь идет об «абстрактных переменных величинах», принимающих числовые значения. Физические же переменные величины с этой точки зрения принимают не числовые, а «именованные» значения. Например, отдельными значениями конкретной величины, имеющей размерность длины, являются не числа 1, 2, 3, а 1 м, 2 м, 3 см и т. д.; причем, хотя 3 см и 0,03 м выражаются различными числами 3 и 0,03, все же  $3 \text{ см} = 0,03 \text{ м}$ .

Открытия Декарта дали математикам общий метод для изучения кривых. Теперь место геометрических рассмотрений, столь популярных у греческих математиков, заняло алгебраическое исследование уравнений кривых, — геометрические свойства устанавливались алгебраическими методами. Это был важный шаг на пути формирования общей идеи зависимости одних переменных величин от других. Многие кривые, которые изучали ученые XVII века, возникли из практических задач — они были нужны для описания качения зубчатых колес, движения маятника и т. д. Изучались и графики элементарных функций — синусоида, тангенсоида и т. д.

## Рождение термина

В науке часто бывает, что длительное время применяется то или иное понятие, но оно фигурирует лишь неявно, не имея определенного названия — каждый ученый называет его по-своему. Из-за этого одни и те же рассуждения повторяются каждый раз заново. Введение нового термина приводит к уточнению соответствующего понятия, освобождению его от всего случайного и несущественного, к выявлению общих черт в рассуждениях, проводившихся независимо друг от друга в различных областях науки.

С 1673 года знаменитый немецкий философ и математик Готфрид Вильгельм Лейбниц начал использовать в своих рукописях слово «*функция*». Однако он употреблял этот термин в очень узком смысле, у него речь шла лишь об отрезках касательных к кривым, об их проекциях на оси коорди-



нат и о «другого рода линиях, выполняющих для данной фигуры некоторую функцию» (от латинского *«фunktus»* — выполнять).

Иоганн Бернулли, один из первых учеников Лейбница, дал определение функции, свободное от геометрических терминов: *«функцией переменной называется количество, образованное каким угодно способом из этой величины и постоянных»*. Это определение привело в восхищение престарелого Лейбница: он угадал, что отход от геометрической терминологии знаменует новую эпоху математики — эпоху изучения функций как самостоятельных объектов, притом основанного на числах, а не на геометрии.

Под «каким угодно способом» во времена Бернулли понимали арифметические операции, операции извлечения корней, тригонометрические, показательные и логарифмические «операции», а также их различные комбинации. Такие функции теперь называют *элементарными* (их сейчас изучают в школе).

В XVII и, особенно, в XVIII веке математики стали рассматривать функции, получаемые суммированием бесконечного множества элементарных функций. Это привело к расширению класса изучаемых функций. Один из самых замечательных математиков XVIII века член Петербургской академии наук Леонард Эйлер определял функцию так: «когда некоторые величины зависят от других таким образом, что при изменении последних и сами они подвергаются изменению, то первые называются функциями вторых». В одной из работ он говорит даже о графике функции, как о кривой, начерченной «свободным движением руки».

## Спор о понятии функции

Вопрос, что же такое функция и как связаны между собой понятия функции и ее аналитического выражения, привлек к себе внимание математиков в связи со спором, в котором приняли участие виднейшие ученые XVIII века — Эйлер, Даламбер, Д. Бернулли и многие другие.

Решая задачу о колебаниях струны, Эйлер и Даламбер получили ответ, в который входила некоторая функция. Эта функция была связана с первоначальной формой колеблющейся струны. Эйлер считал, что первоначальное отклонение струны от положения равновесия может задаваться на разных участках струны разными формулами, напри-

мер так:

$$y = \begin{cases} ax, & \text{если } 0 \leq x \leq l/2, \\ a(l-x), & \text{если } l/2 \leq x \leq l \end{cases}$$

( $l$  — длина струны). Даламбер же считал, что такие функции недопустимы, что следует рассматривать лишь функции, имеющие одно аналитическое выражение для всех значений аргумента  $x$ .

Положение осложнилось после того, как Даниил Бернулли предложил формулу, выражавшую решение в виде суммы бесконечного ряда, составленного из тригонометрических функций, причем оказалось, что эта формула годится и в случае, указанном Эйлером. Получилось, что одна и та же функция может быть задана и одним выражением (суммой ряда), и разными выражениями. Это никак не укладывалось в сознании ученых XVIII века.

Возникший спор привел к тому, что в конце XVIII века математики, определяя функцию, избегали говорить о том, как она задана. Например, французский математик Лакруа писал: «Всякое количество, значение которого зависит от одного или многих количеств, называется функцией этих последних, независимо от того, известно или нет, какие операции нужно применять, чтобы перейти от них к первому».

## Современный этап

Окончательный разрыв между понятиями функции и ее аналитического выражения произошел в начале XIX века, после того как французский математик Фурье показал, что функции, заданные на разных участках по-разному, можно, вообще говоря, представить во всей области задания в виде суммы одного и того же бесконечного ряда. Таким образом, несущественно, одним или многими выражениями задана функция; суть лишь в том, какие значения принимает одна величина при заданных значениях другой величины.

После длительного уточнения этой идеи, в котором приняли участие немецкий математик Лежен Дирихле, русский математик Николай Иванович Лобачевский и другие ученые, пришли к следующему определению функции: *«Переменная величина  $y$  называется функцией переменной величины  $x$ , если каждому значению величины  $x$  соответствует единственное определенное значение величины  $y$ »*.

По этому определению получилось, что функций гораздо больше, чем этого хотелось бы его авторам. Например, еще Дирихле заметил, что под это определение подпадает такая «странная» функция, как

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число,} \\ 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число.} \end{cases}$$

Действительно, каждому значению  $x$  соответствует определенное значение  $D(x)$ ; например,  $D(5/6)=1$ , а  $D(\pi)=0$ . С точки же зрения математика XVIII века  $D(x)$  совсем не функция, поскольку не указана формула, по которой ее можно вычислить.

После введения этого определения под одним и тем же словом «функция» стали пониматься совсем разные вещи. Глядя на формулу  $s = \frac{1}{2}gt^2$ , одни говорили, что  $s$  — функция аргумента  $t$  (путь — функция времени). Другие считали функцией выражение  $\frac{1}{2}gt^2$ , т. е. придавали основное значение выражению, по которому можно находить значения функции. Но все большее распространение получала третья точка зрения, согласно которой функцией здесь является не  $s$  и не выражение  $\frac{1}{2}gt^2$ , а закон, позволяющий по заданному значению  $t$  находить значение  $s$  (тот же закон можно ведь записать и так:  $s = \frac{1}{2}g\sqrt{t^4}$ ). Иными словами, функцию стали трактовать как закон, позволяющий по каждому значению  $x$  найти единственное значение  $y$ .

Когда была создана общая теория множеств, стало ясно, что в понятии функции значениями как  $x$ , так и  $y$  совсем не обязаны быть числа. Теперь под функцией  $f$  понимают зависимость или соответствие между любыми множествами  $X$  и  $Y$ , при которых каждому элементу  $x$  из  $X$  соответствует единственный элемент  $y$  из  $Y$ ,  $y=f(x)$ .  $X$  называют *областью определения* функции, а множество  $\{f(x)|x \in X\}$  — *множеством ее значений*. Обычно для произвольных множеств вместо слова «функция» предпочитают равносильный ему термин «отображение». Например, геометрические преобразования задают отображения множества точек плоскости (или пространства) на себя. Сопоставляя каждому треугольнику вписанную в него окружность, получаем отображение множества треугольников на множество окружностей, а со-

поставляя треугольнику его площадь — отображение множества треугольников на множество положительных чисел. Функции, которые рассматривали Лейбниц и Бернулли, Эйлер, Лобачевский и Дирихле, являются отображениями одного числового множества на другое (например, функция  $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ ,  $-R \leq x \leq R$ , отображает отрезок  $[-R; R]$  на отрезок  $[0; R]$ ). Их называют *числовыми* функциями.

Мы проследили развитие понятия функции от его истоков до современных обобщений. При столь общем подходе к понятию функции, который принят сейчас, уже трудно уловить его происхождение из задач физики, астрономии и геометрии. Но все же в основе остается тот факт, что при заданном значении некоторой физической величины зависящие от нее величины принимают совершенно определенные значения. Именно это и дает возможность использовать функциональные зависимости и при расчете полета межпланетного космического корабля, и при изучении сил, действующих в атомном ядре, и при выборе наиболее выгодного плана производства.

### Упражнения

1. Каждому параллелограмму сопоставляют его площадь. Является ли это соответствие функцией? Каковы ее область определения и множество значений?

2. Каждой окружности сопоставляют касательную к ней прямую. Является ли это соответствие функцией; если является, то каковы ее область определения и множество значений?

3. Каждой окружности сопоставляется вписанный в нее квадрат. Является ли это соответствие функцией? Является ли функцией соответствие, при котором каждой окружности сопоставляется вписанный в нее квадрат, стороны которого параллельны осям координат?

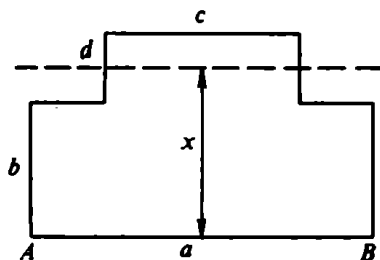


Рис. 2

4. Является ли функцией соответствие, при котором каждому треугольнику сопоставляется центр описанной вокруг него окружности? Каковы здесь область определения и множество значений? Является ли функцией соответствие, при котором каждой тройке точек на плоскости сопоставляется центр проходящей через них окружности?

5. Является ли функцией соответствие, при котором каждой паре  $(a, b)$  чисел сопоставляется точка с абсциссой  $a$  и ординатой  $b$ ? Каковы здесь область определения и множество значений?

6. Выразите через  $x$  площадь фигуры, отсеченной от фигуры, изображенной на рисунке 2, прямой, параллельной основанию  $AB$  и отстоящей от него на расстояние  $x$  (размеры даны на рисунке).

# ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

А. Хинчин

Понятие производной — одно из основных в математическом анализе. Мы помещаем рассказ о геометрической иллюстрации производной, одинаково важной как для анализа, так и для геометрии, которой в школе отведено мало времени. Этот рассказ взят нами из «Краткого курса математического анализа» известного советского математика и педагога Александра Яковлевича Хинчина (1894—1959)\*.

Геометрическое изображение функций служит чрезвычайно ценным орудием их исследования, прежде всего потому, что многие черты в поведении функции, которые трудно было бы прочесть при ее задании с помощью формулы (а тем более — таблицы), на графике выступают с полной наглядностью и отчетливо видны глазу. Любая особенность данной функции должна при ее графическом изображении выступать как некоторое геометрическое свойство изображающей кривой. Можно, в частности, заранее предвидеть, что чертеж, изображающий функцию, даст нам вместе с тем и наглядное представление о ее производной.

Пусть мы изображаем функцию  $y=f(x)$  в декартовой системе координат  $(x; y)$  (рис. 1). Отметим на кривой точки  $M(x; y)$  и  $N(x+\Delta x; y+\Delta y)$ . Проведем прямую  $MP$  параллельно оси  $Ox$ . Очевидно, в прямоугольном треугольнике  $MNP$  катетами служат  $MP=\Delta x$  и  $NP=\Delta y$ . Поэтому отношение  $\Delta y/\Delta x$  равно тангенсу угла  $\varphi$ , образуемого хордой  $MN$  с положительным направлением оси  $Ox$ .

Заставим теперь  $\Delta x$  стремиться к нулю. При этом точка  $M$  будет оставаться неподвижной, а точка  $N$  — неограниченно приближаться к ней. Хорда  $MN$  будет изменять

---

\* А. Я. Хинчин, «Краткий курс математического анализа», М., Гостехиздат, 1957.

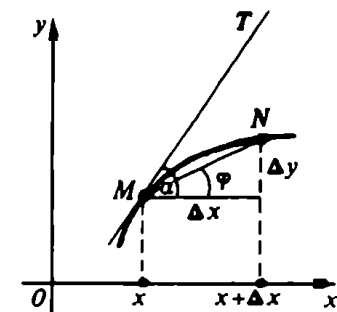


Рис. 1

свое направление, причем в каждый момент этого процесса угловой коэффициент этой хорды —

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x};$$

если данная функция имеет производную в точке  $x$ , т. е. если существует

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = y',$$

то геометрически это означает, что направление хорды  $MN$  стремится при этом к некоторому предельному направлению  $MT$ , образуемому с положительным направлением оси  $Ox$  угол  $\alpha$ , причем

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'. \quad (1)$$

Прямую  $MT$ , которую чисто геометрически можно определить как предельное положение секущей  $MN$ , соединяющей точку  $M$  с безгранично приближающейся к ней другой точкой  $N$  данной кривой, называют *касательной* к данной кривой в точке  $M$ . Равенство (1) показывает, что *производная функции  $f(x)$  в точке  $x$  равна угловому коэффициенту касательной к соответствующей кривой в точке с абсциссой  $x$* . Если, как это обычно делается, считать (в хорошем согласии с нашим наглядным представлением), что направление касательной характеризует нам направление самой кривой в данной точке, то мы непосредственно видим, что если кривая (с возрастанием  $x$ , т. е. слева направо) поднимается, то производная ее неотрицательна, и чем круче подъем, тем больше величина производной; напротив, там, где кривая (слева направо) опускается, производная неположительна.

причем и здесь абсолютная величина производной тем больше, чем круче спуск.

Найденный нами геометрический образ производной позволяет наглядно разобраться и в примерах отсутствия производной. Рисунок 2 дает нам график функции  $y=|x|$ , а рисунок 3 — функции  $y=x \sin \frac{1}{x}$ . В первом случае линия  $y=|x|$  при  $x=0$  имеет определенное направление вправо и определенное направление влево, но эти два направления различны между собою; во втором случае кривая  $y=x \sin \frac{1}{x}$  в точке  $x=0$  ни вправо, ни влево никакого определенного направления не имеет (отсутствие касательной): по мере того, как  $|x|$  становится все меньше и меньше, направление секущей все вновь и вновь колеблется между прямыми  $y=x$  и  $y=-x$  и потому не может стремиться ни к какому предельному направлению.

Наконец, с точки зрения геометрической интерпретации производной легко понять, почему так долго господствовала уверенность в том, что всякая непрерывная функция должна иметь производную (кроме, может быть, некоторых особых точек): действительно, очень трудно представить себе непрерывную кривую, которая ни в одной точке не имела бы касательной; и даже теперь, когда существование таких кривых твердо установлено, мы лишь весьма приблизительно можем представить себе их течение; такая кривая в соседстве каждой своей точки расположена примерно так, как кривая рисунка 3 в соседстве точки  $O$ . Как бы то ни было, такие кривые существуют, и открытие их было в истории математики одним из самых ярких примеров того, как

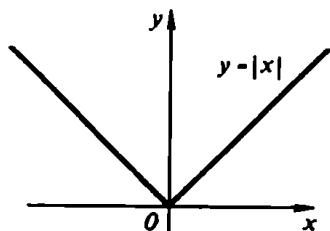


Рис. 2

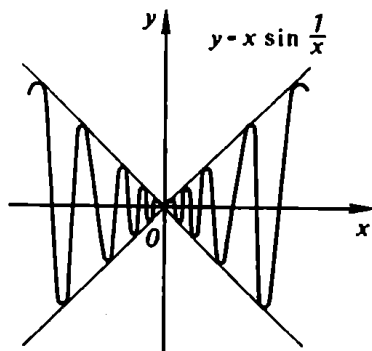


Рис. 3



интуиция, господствовавшая целыми веками, может все же оказаться ошибочной.

Заметим еще, что знание величины производной  $y'$  в точке  $x$ , очевидно, позволяет нам элементарными приемами построить касательную к кривой  $y=f(x)$  в точке  $M$ . Элементарная геометрия учит нас строить касательные к окружностям, в аналитической геометрии мы учимся находить касательные ко всем кривым второго порядка, но только дифференциальное исчисление позволяет поставить и решить общую задачу о проведении касательной к произвольной кривой в любой данной ее точке.

А теперь в качестве упражнений мы предлагаем читателям несколько задач на касательные к кривым.

## Задачи

1. У параболы  $y = \frac{4x - x^2}{4}$  проведены касательные в точках  $(0; 0)$ ,  $(2; 1)$ ,  $(4; 0)$ . Найдите их угол наклона касательной к оси  $Ox$ .
2. Найдите угол наклона касательной к гиперболе  $xy = a^2$  в точке  $(a; a)$ .
3. а) Под каким углом кривая  $y = \ln x$  пересекает ось  $Ox$ ?
- б) Тот же вопрос для синусоиды  $y = \sin x$ .
4. При каком  $a$  кривая  $y = a^x$  пересекает ось  $Oy$  под углом  $45^\circ$ ?
5. Под каким углом пересекаются с осью  $Oy$  кривые

$$y = \sin x\sqrt{3}, y = \frac{x}{1+x^2}, y = \frac{x}{\sqrt{3+x^2}}?$$

6. При каком значении  $a$  кривая  $y = \frac{1}{4}(ax - x^3)$  пересекает ось  $Ox$  под углом  $45^\circ$ ?

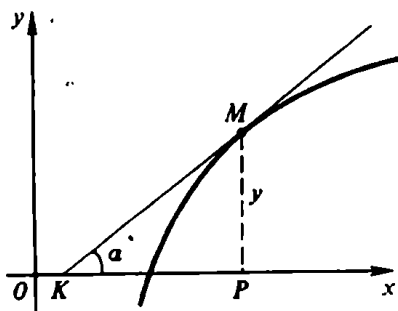


Рис. 4

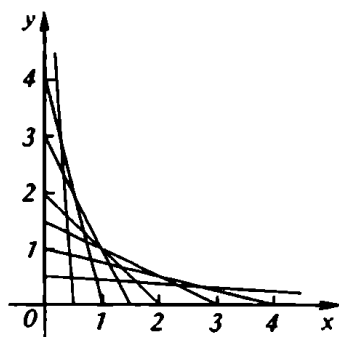


Рис. 5

## Построение касательных

Обозначим через  $P$  проекцию точки касания  $M(x; y)$  на ось  $Ox$ , а через  $K$  — точку, в которой касательная пересекает ось  $Ox$  (рис. 4). Отрезок  $KP$  называется *подкасательной*. Из прямоугольного треугольника  $KPM$  (см. рис. 4) получаем:  $KP \cdot |\operatorname{tg} \alpha| = |y|$  или, поскольку  $\operatorname{tg} \alpha = y'$ ,

$$KP = \frac{|y|}{|y'|}.$$

7. а) Определив длину подкасательной к параболе  $y = ax^2$ , дайте способ построения касательной.

б) То же для кривой  $y = x^n$ .

8. Докажите, что кривая  $y = a^x$  имеет подкасательную постоянной длины, и дайте способ построения касательной к этой кривой.

9. Докажите, что касательная к гиперболе  $xy = a^2$  образует с осями координат треугольник постоянной площади  $2a^2$ .

Из задачи 9 вытекает интересное свойство гиперболы. Гипербола является огибающей прямых, отсекающих от прямого угла треугольники одной площади  $S$ , т. е. гипербола касается всех таких прямых (рис. 5).

# О ТЕОРЕМЕ ЛАГРАНЖА

Л. Смоляков

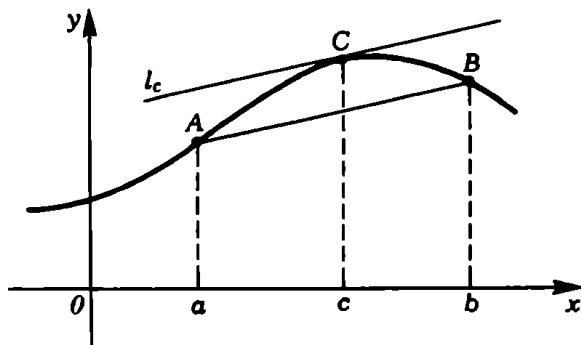
Прежде всего напомним формулировку теоремы Лагранжа.

Пусть функция  $f$  дифференцируема в каждой точке некоторого промежутка. Тогда между любыми двумя точками  $a$  и  $b$  этого промежутка найдется такая точка  $c$ , что

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad (1)$$

Эта теорема допускает простую геометрическую интерпретацию. Возьмем на графике функции  $f$  две точки  $A = M(a; f(a))$  и  $B = M(b; f(b))$  (см. рисунок). Угловой коэффициент прямой  $AB$  равен  $(f(b) - f(a))/(b - a)$ , угловой коэффициент касательной к графику функции  $f$  в точке с абсциссой  $x = c$  равен  $f'(c)$ . Поэтому, записав равенство (1) в виде  $(f(b) - f(a))/(b - a) = f'(c)$ , мы получим геометрическую интерпретацию теоремы Лагранжа: существует такая точка  $c$  промежутка  $(a; b)$ , что касательная к графику функции  $f$  в точке с абсциссой  $x = c$  параллельна прямой  $AB$ .

Точек  $x = c$ , для которых выполнено равенство (1), мо-



жет быть и более одной. В этом вы можете убедиться, выполнив следующее упражнение.

1. Найдите все значения  $x=c$ , при которых для функции  $f(x)=(x-1)^3$ ,  $a=0$ ,  $b=2$ , выполняется равенство (1). (Ответ:  $c=1-1/\sqrt{3}$  и  $c=1+1/\sqrt{3}$ ).

Мы хотим познакомить вас с механической интерпретацией теоремы Лагранжа. Пусть материальная точка движется по прямой и в момент  $t$  имеет координату  $s(t)$ . Тогда ее средняя скорость на промежутке времени от  $t_1$  до  $t_2$  будет равна  $(s(t_2)-s(t_1))/(t_2-t_1)$ . Хорошо известно, что мгновенная скорость в момент времени  $t$  равна  $s'(t)$ . Вполне понятно, что в некоторые моменты времени мгновенная скорость будет больше средней скорости, в другие — меньше. Однако обязательно найдется такой момент времени (и может быть не один!), что средняя скорость будет равна мгновенной. Следовательно, для некоторого  $t_0 \in (t_1; t_2)$

$$(s(t_2)-s(t_1))/(t_2-t_1)=s'(t_0),$$

т. е.  $s(t_2)-s(t_1)=s'(t_0)(t_2-t_1)$ . (Сравните эту формулу с формулой (1).)

Отметим также, что случай, когда  $f$  не имеет производной в какой-либо точке, лежащей между  $a$  и  $b$ , применять теорему Лагранжа нельзя: рассмотрите в качестве примера функцию  $f(x)=|x^2-1|$ ,  $a=1/2$ ,  $b=\sqrt{7}/2$ .

### Упражнения

2. Для каких промежутков можно применять теорему Лагранжа к функции  $f$ , если: а)  $f(x)=x$ ; б)  $f(x)=\{x\}$ ; в)  $f(x)=|x|$ ?

3. Материальная точка движется по прямой по закону  $s(t)=t^3$ , где  $s$  — путь в метрах,  $t$  — время в секундах. В какой момент времени ее мгновенная скорость равна средней скорости на промежутке от  $t_1=13$  с до  $t_2=46$  с?

4. В каких точках для функций  $f(x)=x^2$  и  $g(x)=px^2+qx+r$  для промежутка  $[a; b]$  выполнено равенство (1)?

Как объяснить геометрически совпадение результатов для обеих функций?

# ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Ю. Соловьев

## Основные понятия и утверждения

Пусть каждому натуральному числу  $n$  поставлено в соответствие некоторое действительное число  $a_n$ . Совокупность чисел  $\{a_n\}$ , где  $n=1, 2, \dots$ , называется *числовой последовательностью* или просто *последовательностью*; каждое число  $a_n$  называется *элементом* или *членом* этой последовательности, а  $n$  — его номером.

Числовая последовательность является частным случаем функции, а именно, последовательность представляет собой функцию, определенную на множестве натуральных чисел и принимающую значения во множестве действительных чисел.

Как задать числовую последовательность? Наиболее естественным является *аналитический* способ, указывающий в явном виде, какие действия нужно выполнить над числом  $n$ , чтобы получить общий член последовательности  $a_n = f(n)$ .

## Примеры

### 1. Последовательность

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

имеет общий член  $a_n = \frac{1}{n}$ .

### 2. Последовательность

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$$

задается правилом  $a_n = (-1)^{n+1}$  или же  $a_n = \sin \frac{(2n-1)\pi}{2}$ .

Другим распространенным способом задания последовательности является *рекуррентный* способ. Он указывает, какие действия нужно произвести над уже вычисленными членами последовательности

чтобы получить следующий член —  $a_{n+1}$ ; кроме того, должны быть заданы (смотря по характеру зависимости) несколько первых членов — так называемые начальные данные.

## Примеры

1. Арифметическая прогрессия определяется рекуррентной зависимостью

$$a_{n+1} = a_n + d, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

с начальным данным  $a_1 = a$ .

2. Последовательность Фибоначчи определяется условием

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

и начальными данными  $a_1 = 1, a_2 = 1$ .

Последовательность имеет вид

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

Эту последовательность можно получить и в аналитической форме:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Последовательность  $\{a_n\}$  называется

а) *ограниченной сверху*, если все ее члены меньше одного и того же числа  $M$ :  $a_n < M, n = 1, 2, 3, \dots$

б) *ограниченной снизу*, если все ее члены больше одного и того же числа  $m$ :  $a_n > m, n = 1, 2, 3, \dots$

в) *ограниченной*, если она ограничена и сверху и снизу:

$$m < a_n < M, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

А теперь сформулируем наше основное определение.

Число  $a$  называется *пределом последовательности*  $\{a_n\}$ , если для любого  $\epsilon > 0$  можно указать такое число  $N$ , что для всех номеров  $n \geq N$  выполняется неравенство

$$|a_n - a| < \epsilon.$$

При этом пишут  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  или  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ .

Последовательность, у которой существует предел, называется *сходящейся*.

Введем теперь последовательности, имеющие своим пределом бесконечность. Такие последовательности называются *бесконечно большими* и определяются следующим образом:

*Последовательность  $\{a_n\}$  называется бесконечно большой, если для любого числа  $\varepsilon$  найдется такой номер  $N$ , что для всех  $n \geq N$  выполняется неравенство  $|a_n| > \varepsilon$ .*

Если последовательность такова, что  $a_n > \varepsilon$ , то пишут  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ , если же  $a_n < -\varepsilon$ , то употребляют обозначение  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ . Во всех случаях говорят, что последовательность  $\{a_n\}$  имеет *бесконечный предел*, равный  $+\infty$  или  $-\infty$ .

В основе фактического вычисления пределов лежат следующие четыре теоремы.

**Теорема 1.** *Если последовательности  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  имеют пределы:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , то последовательность  $\{a_n + b_n\}$  также имеет предел*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b.$$

**Теорема 2.** *При тех же предположениях последовательность  $\{a_n - b_n\}$  имеет предел*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b.$$

**Теорема 3.** *При тех же предположениях последовательность  $\{a_n b_n\}$  имеет предел*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab.$$

**Теорема 4.** *При тех же предположениях и дополнительном условии  $b \neq 0$  последовательность  $\{a_n/b_n\}$  имеет предел*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Очень часто теорему 1 формулируют кратко: «Предел суммы равен сумме пределов» и записывают в виде

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

причем условия теоремы подразумеваются. Аналогичные замечания справедливы и по поводу теорем 2—4.

Доказательства всех четырех теорем более или менее аналогичны, поэтому мы докажем лишь теорему 1.

**Доказательство.** Нам дано, что при достаточно больших  $n$  отклонения  $|a_n - a|$  и  $|b_n - b|$  делаются сколь угодно малыми. Требуется доказать то же самое для отклонения

$$|(a_n + b_n) - (a + b)|.$$

По свойству абсолютной величины имеем:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|.$$

Пусть задано некоторое число  $\varepsilon > 0$ . Тогда можно подобрать такое  $N_1$ , что при  $n > N_1$

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$

и такое  $N_2$ , что при  $n > N_2$

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

В таком случае, обозначая через  $N$  наибольшее из чисел  $N_1$  и  $N_2$ , будем иметь при  $n > N$

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Введем теперь следующее определение. Последовательность  $\{a_n\}$  называется *неубывающей* (*невозрастающей*), если для каждого  $n = 1, 2, \dots$  выполняется неравенство  $a_n \leq a_{n+1}$  (соответственно, неравенство  $a_n \geq a_{n+1}$ ). Невозрастающие и неубывающие последовательности называются *монотонными*. Если все упомянутые неравенства являются строгими, то последовательность называется *возрастающей* (*убывающей*). Например, последовательность  $\{1/n^2\}$  убывает, последовательность  $\{n\}$  возрастает, а последовательность  $\{\sin \frac{\pi n}{2}\}$  не является монотонной.

В теории пределов очень важно следующее свойство действительных чисел, которое обычно принимают за аксиому.



**Аксиома Больцано — Вейерштрасса.** *Всякая неубывающая (невозрастающая) последовательность имеет предел — конечный, если она ограничена сверху (снизу), и бесконечный, равный  $+\infty$  ( $-\infty$ ), если она не ограничена сверху (соответственно снизу).*

В курсе математического анализа доказывается, что аксиома Больцано — Вейерштрасса равносильна каждому из следующих утверждений:

*если на числовой оси построена бесконечная последовательность отрезков так, что каждый следующий отрезок лежит внутри предыдущего, то все отрезки имеют по крайней мере одну общую точку;*

*всякое действительное число можно записать в виде бесконечной (периодической или непериодической) десятичной дроби, и каждой такой дроби соответствует некоторое действительное число.*

Если одно из этих утверждений принять за аксиому, то второе утверждение и аксиома Больцано — Вейерштрасса станут теоремами, которые можно доказать.

**Теорема 5.** *Из всякой последовательности, содержащей бесконечное множество чисел, можно выбрать другую последовательность, стремящуюся к некоторому конечному или бесконечному пределу.*

**Доказательство.** Если в данной последовательности  $\{a_n\}$  содержится лишь конечное множество чисел, не превосходящих  $a_1$ , то в ней обязательно будет бесконечное множество чисел, больших  $a_1$ . Чтобы иметь дело с определенным случаем, мы предположим, что в нашей последовательности содержится бесконечное множество чисел, больших  $a_1$ . Пусть одно из них  $a_{r_1}$ . Может случиться, что среди следующих за ним чисел найдется число  $a_{r_2} > a_{r_1}$ , среди следующих за  $a_{r_2}$  чисел найдется число  $a_{r_3} > a_{r_2}$ , и т. д. Если продолжать такой выбор чисел беспрестанно, то из данной последовательности выделится последовательность, имеющая по аксиоме Больцано — Вейерштрасса конечный или бесконечный предел. В противном случае встретится некоторое число  $a_{r_n}$ , которого не превзойдет ни одно из следующих за ним чисел; тем самым, выделится конечная цепочка чисел

$$a_1 < a_{r_1} < a_{r_2} < \dots < a_{r_n}.$$

Среди чисел, следующих за  $a_{r_n}$ , снова будет, по предположению, бесконечное множество чисел, больших  $a_1$ , но не превосхо-

дящих  $a_i$ . Начиная с одного из них, скажем  $a_{s_1}$ , составляем, подобно предыдущему, возрастающую последовательность, которая, как и первая, либо продолжится беспрестанно (и тогда теорема будет доказана), либо оборвется на некотором числе  $a_{s_j}$ , которого ни одно из последующих чисел не превзойдет, но само оно будет не больше  $a_{r_i}$ . Таким образом, получится новая конечная цепочка чисел

$$a_1 < a_{s1} < a_{s2} < \dots < a_{sj}, \quad a_{ri} \geq a_{sj}.$$

Продолжая далее таким же образом, мы получим ряд цепочек

$$a_1 < a_{r_1} < a_{r_2} < \dots < a_{r_i}.$$

$$a_1 < a_{s1} < a_{s2} < \dots < a_{s1n}$$

$$a_1 < a_{i_1} < a_{i_2} < \dots < a_{i_r}$$

• • • • •

При этом мы либо дойдем до последовательности с бесконечным числом возрастающих членов (и теорема будет доказана), либо получим последовательность, состоящую из бесконечного множества невозрастающих членов

$$a_{r_i} \geq a_{s_i} \geq a_{t_i} \geq \dots,$$

имеющую по аксиоме Больцано — Вейерштрасса конечный предел, так как все они больше  $a_1$ .

**Теорема 6.** Пусть  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  — две последовательности, обладающие следующими свойствами:

1) если из  $\{a_n\}$  выбрана подпоследовательность  $\{a_{n_i}\}$ , стремящаяся к пределу  $a$ , то подпоследовательность  $\{b_{n_i}\}$  стремится к некоторому пределу  $b$ ;

2) различным значениям пределов  $a$  соответствуют различные значения пределов  $b$ .

Тогда, если  $\{b_n\}$  имеет определенный предел, то и  $\{a_n\}$  также имеет определенный предел.

**Доказательство.** Будем рассуждать от противного. Действительно, если бы последовательность  $\{a_n\}$  не имела определенного предела, то мы могли бы выделить из нее подпоследовательности, имеющие различные пределы  $a$ , которым соответствовали бы и различные значения  $b$ , что противоречит существованию определенного значения предела для  $\{b_n\}$ .

**Теорема 7.** Если  $\{a_n\}$  — некоторая последовательность и  $\{b_n\}$  — бесконечно возрастающая неограниченная последовательность, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}, \quad (1)$$

в предположении, что второй предел существует.

**Доказательство.** Обозначим через  $l$  предел, стоящий в правой части равенства (1). Тогда возможно найти такое число  $N$ , что при  $n > N$  всегда

$$\left| \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} - l \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Другими словами, все дроби

$$\frac{a_{N+1} - a_N}{b_{N+1} - b_N}, \frac{a_{N+2} - a_{N+1}}{b_{N+2} - b_{N+1}}, \dots, \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$$

содержатся между  $l - \frac{\varepsilon}{2}$  и  $l + \frac{\varepsilon}{2}$ . Вместе с тем, поскольку все знаменатели положительны, будем иметь

$$\left| \frac{a_n - a_N}{b_n - b_N} - l \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Возьмем  $N$  достаточно большим для того, чтобы имело место не только последнее неравенство, но и неравенство  $b_N > 0$ , что всегда возможно, потому что по условию  $\{b_n\}$  бесконечно возрастает. На том же основании, при фиксированном  $N$  можно выбрать  $n$  таким, чтобы число  $\frac{\varepsilon}{2} b_n$  превзошло абсолютную величину числа  $a_N - lb_n$  и затем при возрастании  $n$  постоянно оставалось большим последнего числа. Замечая теперь, что

$$\frac{a_n}{b_n} - l = \frac{a_N - lb_N}{b_n} + \left(1 - \frac{b_N}{b_n}\right) \left(\frac{a_n - a_N}{b_n - b_N} - l\right),$$

непосредственно находим, что

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - l \right| < \varepsilon, \text{ т. е. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l.$$

**Следствие 1.** Если некоторая последовательность стремится к конечному пределу, то к тому же пределу стремится и среднее арифметическое и среднее геометрическое ее первых  $n$  членов.

В самом деле, на основании последней теоремы мы имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad (2)$$

в предположении, что предел в правой части существует.

Ниже мы увидим (пример 3 следующего раздела), что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\log_b a_n) = \log_b (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n).$$

Считая это доказанным и заменяя в предыдущем равенстве  $a_n$  на  $\log_b a_n$ , получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\log_b \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\log_b a_n),$$

откуда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

в предположении, что предел в правой части равенства существует.

**Следствие 2.** Если в некоторой последовательности  $\{a_n\}$  отношение  $a_n/a_{n-1}$  стремится к некоторому конечному пределу, то к этому же пределу стремится и  $\sqrt[n]{a_n}$ .

Действительно, стоит лишь заменить в равенстве (3)  $a_n$  на  $a_n/a_{n-1}$ , чтобы получить

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}},$$

т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} \left( = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \right). \quad (4)$$

## Примеры вычисления пределов

1. Пусть нам дано положительное число  $a$  и требуется найти предел  $a^n$  при возрастании  $n$  до бесконечности. При  $a=1$  имеем всегда  $a^n=1$ . При  $a<1$  имеем  $a^n=a^{n-1} \cdot a < a^{n-1}$ , т. е. последовательность  $\{a_n\}$  монотонно убывает и поэтому, в силу аксиомы Больцано — Вейерштрасса, должна стремиться к конечному пределу  $l \geq 0$ . Но из равенства  $a^n=a^{n-1} \cdot a$  при переходе к пределу следует, что  $l=la$ , т. е.  $(a-1)l=0$ , откуда  $l=0$ . При  $a>1$  имеем  $a^n=a^{n-1} \cdot a > a^{n-1}$ . Значит, по-

следовательность  $\{a_n\}$ , монотонно возрастаая вместе с  $n$ , должна стремиться к конечному или бесконечному пределу; но этот предел конечным быть не может, потому что он должен быть положительным числом  $l$ , а предыдущее равенство при переходе к пределу дает  $l=la$ , откуда  $l=0$ . Итак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} 0 & \text{при } a < 1, \\ 1 & \text{при } a = 1, \\ +\infty & \text{при } a > 1. \end{cases}$$

2. Допустим, что существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  и пусть  $b$  — некоторое заданное положительное число. Найдем предел последовательности  $\{b^{a_n}\}$ . Предположим сперва, что  $b$  меньше единицы и обозначим через  $\alpha_n$  абсолютную величину  $a_n - a$ :  $\alpha_n = |a_n - a|$ . Если задано некоторое сколь угодно малое положительное число  $\epsilon$ , то на основании предыдущего примера можно найти такое число  $m$ , чтобы  $(1-\epsilon)^m$  было меньше  $b$ . Не изменяя  $m$ , выберем теперь  $n$  таким, чтобы  $\alpha_n$  было меньше  $1/m$  и оставалось таким при дальнейшем возрастании  $n$  (это возможно, поскольку  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ ). Тогда будем иметь

$$1 - b^{\alpha_n} < 1 - (1 - \epsilon)^{m\alpha_n} < 1 - (1 - \epsilon) = \epsilon.$$

Отсюда получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b^{\alpha_n} = 1,$$

и значит,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b^{a_n} = b^a$ , т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} b^{a_n} = b^{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$ .

При  $b > 1$  можно написать

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b^{a_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} b^{-a_n}} = \frac{1}{b^{-a}} = b^a.$$

3. Считая, что последовательность  $\{a_n\}$  стремится к пределу  $a$ , найдем предел последовательности  $\{\log_b a_n\}$ . Положим  $\log_b a_n = c_n$ . Тогда  $a_n = b^{c_n}$ . Если  $\{c_n\}$  стремится к пределу  $c$ , то, согласно примеру 2, последовательность  $\{a_n\}$  стремится к пределу  $b^c$ . Поэтому (по теореме 6) справедливо и обратное — если существует предел  $\{a_n\}$ , то существует и предел  $\{c_n\}$ , причем

$$a = b^c, \quad c = \log_b a.$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\log_b a_n) = \log_b (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n).$$

4. Пусть последовательности  $\{a_n\}$ ,  $a_n > 0$  и  $\{b_n\}$  стремятся соответственно к пределам  $a$  и  $b$ . Найдем предел последовательности  $\{a_n^{b_n}\}$ . Полагая  $c_n = a_n^{b_n}$ , имеем

$$\log_2 c_n = b_n \log_2 a_n,$$

откуда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 c_n = \log_2 \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = b \log_2 a = \log_2 a^b.$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)^{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}.$$

5. Исследуем теперь последовательность  $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ . Прежде всего, докажем, что последовательность  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  возрастающая. Для этого мы воспользуемся неравенством Коши:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

при  $x_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).\*

При  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = x_3 = \dots = x_{n+1} = 1 + \frac{1}{n}$  имеем:

$$\sqrt[n+1]{1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} < \frac{1 + n \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n+1} = \frac{1+n+1}{n+1}. \quad (5)$$

Неравенство здесь строгое, так как равенство в неравенстве Коши возможно лишь при  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

Возведя (5) в степень  $n+1$ , получаем

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

т. е.  $a_n < a_{n+1}$ .

---

\* Доказательство этого неравенства приведено в статье Ю. Соловьева «Неравенство Коши» в настоящем сборнике.

Рассмотрим также последовательность  $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ . Ясно, что  $a_n < b_n$  при любом  $n$ . Докажем, что последовательность  $\{b_n\}$  убывающая; для этого достаточно доказать возрастание последовательности  $\frac{1}{b_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$ .

Рассуждая так же, как раньше, имеем

$$n+2 \sqrt[n+2]{1 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}} \leq \frac{1 + (n+1) \frac{n}{n+1}}{n+2} = \frac{n+1}{n+2},$$

т. е.

$\frac{1}{b_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} < \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} = \frac{1}{b_{n+1}}$  и следовательно,  $b_{n+1} < b_n$ . Поскольку  $a_n < b_n$  при любом  $n$  получаем сразу  $a_n < b_1 = 4$ . Последовательность  $a_n$  возрастает и ограничена, следовательно, существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e$ . Легко видеть, что при любом  $n$

$$a_n < e < b_n,$$

причем  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  тоже равен  $e$ .

В курсах математического анализа доказывается, что число  $e$  иррационально и, более того, трансцендентно, т. е. не является корнем никакого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами. Справедливо приближенное равенство  $e \approx 2,718281828459045$ .

### Задачи для самостоятельного решения

Вычислите следующие пределы:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 1}{(n+1)^2}$ ;
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + 2}}{n+2}$ ;
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3 + n} - n}$ ;
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1+2+3+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2} \right)$ ;
5.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2+3-\dots-2n}{\sqrt{n^2+1}}$ ;

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \left( a + \frac{1}{n} \right)^2 + \left( a + \frac{2}{n} \right)^2 + \dots + \left( a + \frac{n-1}{n} \right)^2 \right);$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1)}{n^3};$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1});$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1});$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} n (\sqrt{n^2+1} - n);$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} (n^{\frac{4}{3}} - (n^2-1)^{\frac{2}{3}}).$$



# НЕРАВЕНСТВО КОШИ

*Ю. Соловьев*

*Среднее арифметическое положительных чисел не меньше их среднего геометрического:*

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

Это знаменитое неравенство, принадлежащее французскому математику О. Коши, было опубликовано в 1821 году. С тех пор оно традиционно считается одним из самых трудных числовых неравенств. За полтора века появилось несколько десятков различных доказательств этого неравенства. Традиция была начата самим Коши. Его доказательство занимало несколько страниц сложных выкладок. Я предлагаю читателям познакомиться с самым простым из известных мне доказательств. По-моему, оно так же красиво, как и поучительно. Но в начале нам понадобится несколько переформулировать неравенство Коши.

Зачем переформулировать одну и ту же задачу? Опытные математики знают, что это занятие совсем не так бесполезно, как это кажется... Простые доказательства сложных теорем как правило состоят из многочисленных переформулировок.

В первую очередь, в нашем неравенстве смущает устрашающий корень  $n$ -й степени, стоящий в правой части. Поделим на него обе части. Справа останется единица, а слева — среднее арифметическое чисел

$$y_1 = \frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}}, \dots, y_n = \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}}.$$

## Переформулировка

*При условиях*

$$y_1 > 0, \dots, y_n > 0, \quad y_1 y_2 \dots y_n = 1$$

надо доказать, что

$$\frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} \geq 1. \quad (*)$$

А теперь вспомним о математической индукции. Будем доказывать неравенство Коши шаг за шагом, каждый раз увеличивая  $n$  на единицу. Для  $n=1$  оно очевидно (и превращается в строгое равенство). Предположим, что нам удалось доказать неравенство при некотором  $n$ . Значит, теперь надо вывести его для  $n+1$ .

### Индуктивный шаг

Нужно доказать, что если

$$z_1 > 0, \dots, z_n > 0, z_{n+1} > 0,$$

$$z_1 z_2 \dots z_n z_{n+1} = 1,$$

то  $z_1 + \dots + z_n + z_{n+1} \geq n + 1$ .

Воспользуемся неравенством (\*), которое мы считаем доказанным для  $n$  чисел. Пусть  $y_1 = z_1, \dots, y_{n-1} = z_{n-1}, y_n = z_n z_{n+1}$ . Тогда выполнены оба условия

$$y_1 > 0, \dots, y_n > 0,$$

$$y_1 y_2 \dots y_n = 1,$$

и мы предполагаем доказанным неравенство  $y_1 + \dots + y_n \geq n$ , т. е.

$$z_1 + z_2 + \dots + z_{n-1} + z_n z_{n+1} \geq n.$$

Заметим, что до сих пор мы занимались одними переформулировками. Но где же само доказательство? Вот оно.

Если надо, то перенумеруем числа  $z_1, \dots, z_{n+1}$  так, чтобы выполнялось  $z_n > 1, z_{n+1} < 1$ . (Ясно, что если все числа  $z_i$  не равны одновременно 1, то среди них найдутся два таких числа.)

Теперь в последней формуле заменим произведение  $z_n z_{n+1}$  на сумму  $z_n + z_{n+1}$ . Для этого надо показать, что  $z_n + z_{n+1} \geq z_n z_{n+1} + 1$ , или

$$z_n + z_{n+1} - z_n z_{n+1} - 1 \geq 0.$$

Левую часть разложим на множители:

$$z_n(1 - z_{n+1}) - (1 - z_{n+1}) = (z_n - 1)(1 - z_{n+1}) \geq 0.$$

Последнее неравенство очевидно, так как  $z_n > 1$ ,  $z_{n+1} < 1$ . Доказательство закончено.

А теперь — два слова об этом доказательстве. Единственное не вполне очевидное место в нем — это выбор чисел  $z_n$ ,  $z_{n+1}$ . В целом же на нас работали элементарные переформулировки и математическая индукция.

А. Земляков

Числовую функцию  $f: x \rightarrow f(x)$  можно задавать многими способами, в том числе и графиком на координатной плоскости  $Oxy$ . Конечно, нарисовать график  $y=f(x)$  «целиком» — при всех значениях  $x \in D(f)$  — как правило, невозможно (скажем, если  $D(f) = \mathbb{R}$ , т.е. функция  $f$  *всюду определена*). Обычно рисуют часть графика, отмечая его характерные точки (см. ниже), и так, чтобы было понятно, каково поведение функции  $f$  и как найти ее значения при произвольных значениях аргумента  $x \in D(f)$ .

Функции, описывающие различные процессы и зависимости реального мира, в большинстве своем являются *непрерывными*. Графиками всюду непрерывных функций являются *непрерывные кривые* (это пояснение, но отнюдь не определение непрерывности!).

К характерным точкам графиков функций в первую очередь относятся точки экстремумов. Напомним, что точка  $x_0$  из области определения  $D(f)$  функции  $x \rightarrow f(x)$  называется точкой *максимума* этой функции, если для всех  $x \neq x_0$  из некоторой окрестности (промежутка  $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ ) точки  $x_0$  выполнено неравенство  $f(x) < f(x_0)$ ; аналогично определяются точки *минимума*. Точкам максимума и минимума (точкам *экстремума*) на графике непрерывной функции соответствуют «горки» и «впадины». Например, функция  $f$ , график которой изображен на рисунке 1, имеет одну точ-

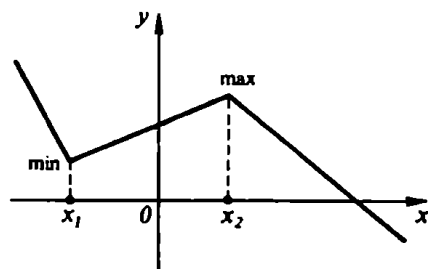


Рис. 1

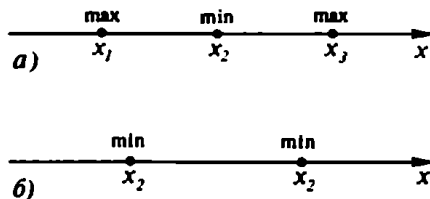


Рис. 2

ку минимума  $x_1$  и одну точку максимума  $x_2$  (предполагается, что на промежутках  $(-\infty; x_1)$  и  $(x_2; +\infty)$  функция  $f$  убывает — «как показано на графике»).

Теперь мы предлагаем вам подумать над следующими вопросами. Не торопитесь; свои ответы подкрепите графиками или доказательствами.

**Вопрос 1.** *Существует ли всюду определенная и непрерывная функция, у которой*

а) было бы ровно две точки максимума  $x_1$  и  $x_3$  и ровно одна точка минимума  $x_2$ , расположенные, как на рисунке 2, а?

б) было бы ровно две точки минимума  $x_1$  и  $x_2$  и не было бы больше ни одной точки экстремума (ни максимума, ни минимума), — рис. 2, б?

**Вопрос 2.** *Существует ли функция*

а) *всюду определенная и непрерывная, имеющая бесконечно много экстремумов (максимумов и минимумов)?*

б) *определенная и непрерывная на отрезке (например, на  $[0, 1]$ ), имеющая бесконечно много экстремумов (на этом отрезке)?*

в) *всюду (на всей числовой прямой) определенная и непрерывная, причем имеющая на отрезке  $[0, 1]$  бесконечно много точек экстремума?*

**Ответ и комментарий к вопросу 1.** а) Такая функция, конечно, существует — см. рисунки 3, а и 3, б (на рис. 3, б изображен график многочлена  $y = x^4 - x^2$  — подтвердите это исследованием с помощью производной).

б) Оказывается, и такая функция существует! Соответствующие графики изображены на рисунках 4, а и 4, б; между

точками минимума  $x_1$  и  $x_2$  этих функций расположена «плоская горка» — участок графика над отрезком  $[a_1; a_2]$ , на котором функция постоянна. Конечно, хочется считать эту горку состоящей целиком из точек максимума. Однако точки  $x_0 \in [a_1; a_2]$  не подходят под наше определение максимума — «строгого» максимума ( $f(x) < f(x_0)$  для точек  $x \neq x_0$  в окрестности  $x_0$ ). Зато они являются точками *нестроого* максимума: для точек  $x$  в некоторой окрестности точки  $x_0$  выполнено нестрогое неравенство  $f(x) \leq f(x_0)$ . Интуитивно ясно, что между двумя точками минимума непрерывная функция должна иметь точку максимума — между двумя впадинами должна быть хотя бы одна горка! Это действительно так, но максимум может оказаться нестрогим.

Понятие нестроого экстремума (максимума или минимума) удобно, но несколько «двусмысленно»: точки интервала  $(a_1; a_2)$  на рисунках 4, а и 4, б с полным правом можно считать и точками нестроого минимума! Еще пример: функция, график которой изображен на рисунке 5, а, не имеет строгих экстремумов, но точка  $x_1$  является для нее точкой нестроого максимума,  $x_2$  — точкой нестроого минимума, а все точки

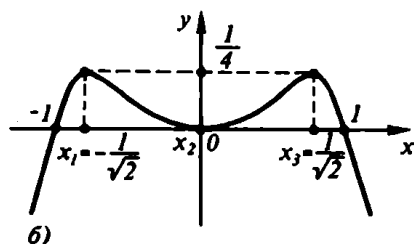
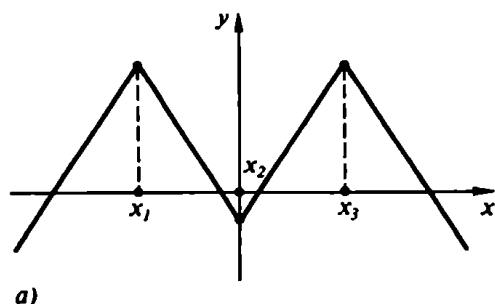


Рис. 3

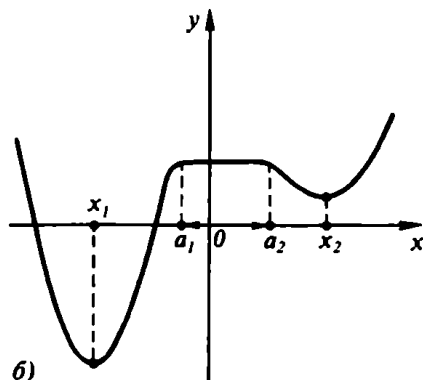
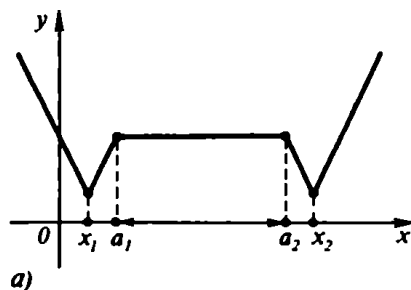


Рис. 4

$x_0$  интервала постоянства  $(x_1; x_2)$  являются одновременно точками нестрогого максимума и нестрогого минимума. Проанализируйте подобным образом функции  $y = |x-1| + |x+1|$  и  $y = |x-1| - |x+1|$  (их графики изображены на рисунках 5, б и 5, в соответственно — проверьте!).

Итак, наряду со школьными понятиями максимума и минимума в математике приняты и понятия нестрогих максимума и минимума — более общие, «несколько двусмысленные» (см. выше), но иногда удобные при формулировке теорем. В качестве примера приведем следующее утверждение:

*Если функция  $f$  определена и непрерывна на отрезке  $[a; b]$ , причем принимает в его концах одинаковые значения, т. е.  $f(a) = f(b)$ , то существует точка  $x_1 \in (a; b)$ , в которой функция  $f$  имеет максимум или минимум (возможно, нестрогие).*

Рисунок 6, а—в иллюстрирует эту теорему, причем указанные на рисунке максимумы и минимумы являются строгими.

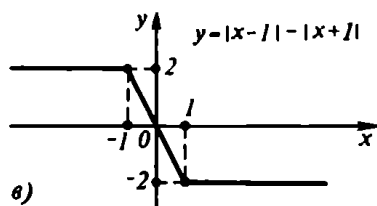
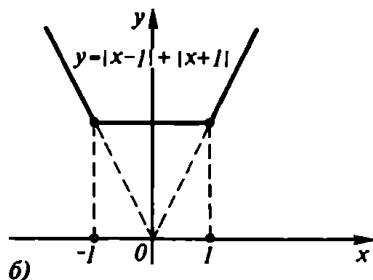
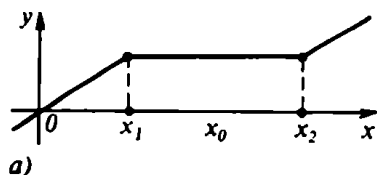


Рис. 5

**Вопрос 3.** Верно ли сформулированное утверждение, если максимумы и минимумы считать только строгими?

В учебниках математического анализа для вузов максимумы и минимумы принято понимать в нестрогом смысле — по причине, указанной выше. В средней школе же в основном приходится иметь дело с такими функциями, у которых минимумы и максимумы только строгие. К этому классу функций, в частности, относятся многочлены и дробно-рациональные функции. Заметим, например, что график на рисунке 4, б не может быть графиком никакого многочлена (в отличие от графика на рисунке 3, б) — попробуйте это доказать!

**Ответ на вопрос 2.** а) Такие функции существуют — например, «пила» на рисунке 7, а или синусоида — график  $y = \sin x$  (рис. 7, б).

б) Оказывается, такие функции тоже существуют. Точки экстремума могут «сгущаться» так, что на отрезке  $[0, 1]$  их



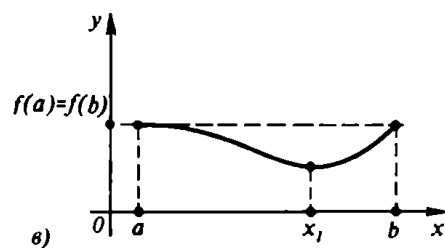
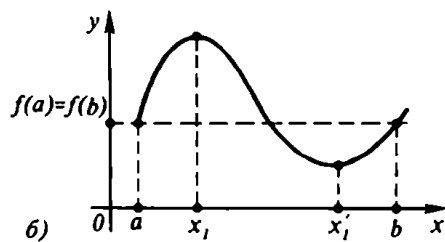
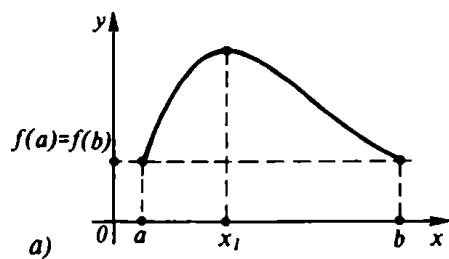


Рис. 6

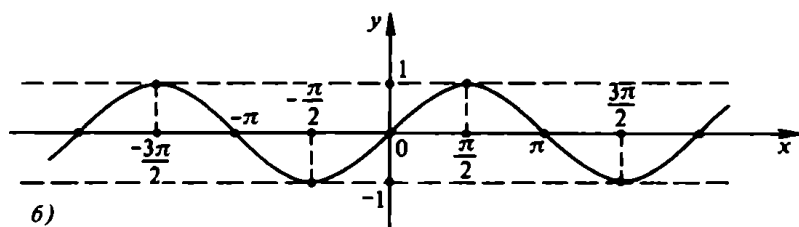
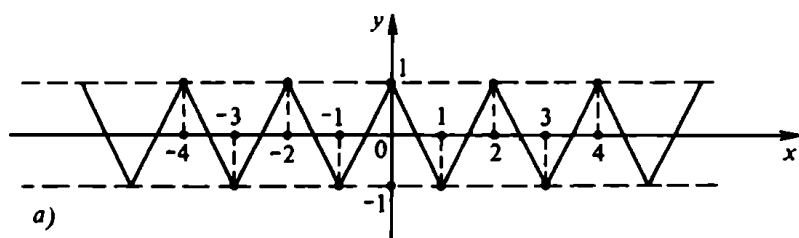


Рис. 7

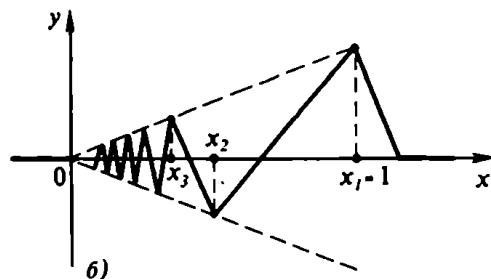
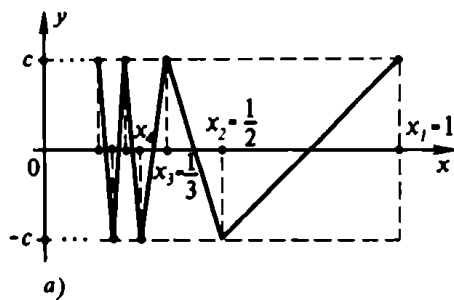


Рис. 8

помещается бесконечно много. Например, на рисунке 8, а в точках  $x_n = \frac{1}{n}$  при четном  $n$  — минимумы, при нечетном — максимумы. Однако график 8, а не определяет значения функции при  $x=0$ . Можно взять  $f(0)=0$  или  $f(0)=c$ , но такая функция не будет непрерывной в точке  $x=0$ : значение  $f(x)$  не стремится к  $f(0)$  при  $x \rightarrow 0$ . Чтобы получить непрерывную функцию, можно сделать так, чтобы значения функции в точках экстремума  $x_0$  стремились к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , как на рисунке 8, б. Если затем продолжить график, как показано на этом рисунке, то мы получим всюду определенную и непрерывную функцию, имеющую бесконечно много экстремумов на отрезке  $[0, 1]$  — ответ на вопрос 2, в).

Графики, аналогичные изображенным на рисунках 8, а и 8, б, конечно, можно задавать и формулами: проверьте, например, что таковы графики функций

$$y = \sin \frac{1}{x} \quad \left( \text{при } 0 < x \leq \frac{2}{\pi} \right),$$

$$y = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Не следует думать, что функции, о которых говорится в вопросе 2,— это какие-то «исключения». С подобными функциями приходится встречаться при изучении различного рода колебательных процессов в физике.

В заключение предложим вам еще один вопрос. Очевидно, если функция  $x \rightarrow f(x)$  *возрастает слева* от точки  $x_0$ , т. е. в некотором промежутке  $(x_0 - \delta; x_0)$ , и *убывает справа* от этой точки — в промежутке  $[x_0; x_0 + \delta]$ , то  $x_0$  — точка максимума функции  $f$  (поясните!).

**Вопрос 4.** *Верно ли обратное: если всюду непрерывная функция  $f$  имеет в точке  $x = x_0$  максимум, то слева от точки  $x_0$  она возрастает, а справа от  $x_0$  — убывает?*

# ЧЕТНЫЕ И НЕЧЕТНЫЕ ФУНКЦИИ

А. Земляков

В мир согласный  
Вечно — ясный,  
Чет и нечет нас влечет...

К. Бальмонт

## Четные функции

Напомним, что числовая функция  $f$  называется *четной*, если выполнены следующие два условия:

(С) если  $x \in D(f)$ , то  $-x \in D(f)$ , т. е. область определения  $D(f)$  функции  $f$  симметрична относительно точки 0 на координатной прямой  $Ox$ ;

(Ч)  $f(-x) = f(x)$  для любого  $x \in D(f)$ , т. е. в симметричных (относительно точки 0 на оси  $Ox$ ) точках  $x$  и  $-x$  функция  $f$  принимает одинаковые значения.

Примеры четных функций: постоянная  $c$  ( $y=c$  при любом  $x \in \mathbb{R}$ ),  $x$ ,  $\cos x$ .

График четной функции на координатной плоскости  $Oxy$  симметричен относительно оси ординат. Доказывается это так. Если точка  $M$  с координатами  $(x; y)$  принадлежит графику функции  $f$  (рис. 1), т. е.  $f(x_0) = y_0$ , то, по определению четной функции,  $-x_0 \in D(f)$  и  $f(-x_0) = y_0$ , а потому и точка  $M'$  с координатами  $(-x_0; y_0)$  принадлежит графику функции  $f$ . Но точка  $M'$  как раз симметрична точке  $M$  относительно оси  $Oy$ . Таким образом, вместе со всякой точкой  $M$  график четной функции  $f$  содержит и симметричную ей точку  $M'$ , а это и означает, что этот график симметричен относительно оси ординат.

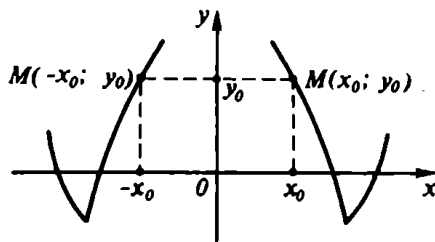


Рис. 1

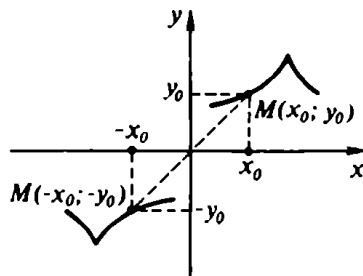


Рис. 2

Верно и обратное: если график функции  $f$  симметричен относительно оси ординат, то функция  $f$  — четная.

Четные функции обладают «хорошими» алгебраическими свойствами: сумма, разность и произведение двух четных функций тоже являются четными функциями (докажите это самостоятельно).

### Нечетные функции

Функция  $f$  называется *нечетной*, если выполнено условие симметрии (С) (см. выше) и следующее условие нечетности: (Н)  $f(-x) = -f(x)$  для любого  $x \in D(f)$ .

Примеры нечетных функций:  $2x$ ,  $x^3$ ,  $1/x$ ,  $\sin x$ ,  $\operatorname{tg} x$ .

График нечетной функции на координатной плоскости  $Oxy$  симметричен относительно начала координат  $O$ ; — докажите это самостоятельно с помощью рисунка 2. Верно и обратное утверждение (сформулируйте и докажите его самостоятельно).

Легко видеть, что сумма и разность двух нечетных функций, а также произведение нечетной функции на число являются нечетными функциями.

### Контрольные вопросы

1. Четной или нечетной функцией является произведение двух нечетных функций?
2. Какой функцией является произведение четной и нечетной функций?

### Ни четные, ни нечетные функции

Отметим, что «нечетная функция» — это отнюдь не то же самое, что «не четная функция» (т. е. функция, не являющаяся четной). Как правило, функция, «взятая наугад», не будет ни четной, ни нечетной: график «произвольной» функции не обязан обладать какими-либо свойствами симметрии.

**Пример 1.** Функция  $f(x)=1/(x+1)$  не является ни четной, ни нечетной, поскольку для ее области определения  $D(f)=\{x|x \neq -1\}$  не выполнено условие симметрии (С): точка  $x_0=1$  принадлежит  $D(f)$ , а точка  $-x_0=-1$  не принадлежит  $D(f)$ .

**Пример 2.** Функция  $f(x)=x^2+x+1$  также не является ни четной, ни нечетной. Эта функция определена всюду, и поэтому условие симметрии (С) для нее выполнено, однако ни условие (Ч), ни условие (Н) не выполнено. В самом деле,  $f(-x)=x^2-x+1$ . Положив  $x=1$ , находим

$$f(1)=1+1+1=3,$$

$$f(-1)=1-1+1=1,$$

и  $f(-1)$  не равно ни  $f(1)$ , ни  $-f(1)$ .

**Замечание.** Ссылка на то, что выражения для  $f(x)$  и  $f(-x)$  «разные», поэтому « $f(-x) \neq f(x)$ », ничего не доказывает: во-первых, совсем разные по своему внешнему виду выражения могут задавать одну и ту же функцию; во-вторых, предложение « $f(-x) \neq f(x)$ » содержит переменную  $x$ , и его истинность или ложность зависит от значения  $x$  (например, в рассматриваемом примере при  $x=0$  как раз  $f(-x)=f(x)$ ). Условие (Ч) четности функции заключается в истинности высказывания

«для любого  $x \in D(f)$  выполнено числовое равенство  $f(-x)=f(x)$ », а утверждение о том, что условие (Ч) не выполняется, заключается в истинности высказывания, являющегося отрицанием предыдущего:

«существует  $x \in D(f)$  такое, что  $f(-x) \neq f(x)$ ».

Таким образом, чтобы опровергнуть условия (Ч) или (Н), нужно доказать существование соответствующего значения  $x$  — например, указать конкретное такое значение.

Возникает вопрос: зачем вводить понятия четности и нечетности функций, если «большинство» функций не являются ни четными, ни нечетными? Это мы сейчас и объясним.

## Физический пример

Если физическая система обладает какой-нибудь симметрией, то и связанные с нею функции часто имеют те или иные свойства симметрии. В простейших случаях возникают как раз четные или нечетные функции.

**Пример.** На горизонтальный стержень — ось  $Ox$  — надета однородная пружина, концы которой закреплены в симметрич-

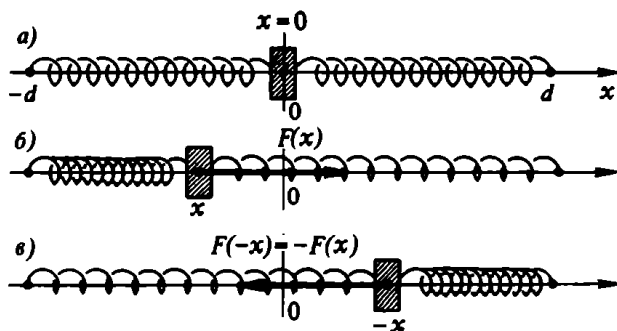


Рис. 3

ных точках  $x = -d$  и  $x = d$ , а к середине пружины — в точке  $x = 0$  — прикреплена шайба, свободно (без трения) перемещающаяся вдоль стержня (рис. 3, а). Пусть шайба отведена в точку с координатой  $x$ . Обозначим через  $F(x)$  величину силы, действующей на шайбу со стороны пружины (точнее говоря, проекцию этой силы на ось  $Ox$ ), а через  $U(x)$  — потенциальную энергию шайбы в этом положении. Очевидно, пружине безразлично, вправо или влево отводится шайба: абсолютная величина силы и потенциальная энергия при смещениях  $x$  и  $-x$  одинаковы, т. е.

$$|F(-x)| = |F(x)|$$

и

$$U(-x) = U(x).$$

Учитывая, что сила в положениях  $x$  и  $-x$  направлена в противоположные стороны (см. рис. 3, б, в), можем записать

$$F(-x) = -F(x).$$

Таким образом, из одних лишь соображений симметрии мы получаем следующее:

- 1) функция  $F(x)$ , выражающая зависимость силы  $F$  от смещения  $x$ , нечетная;
- 2) функция  $U(x)$ , выражающая зависимость потенциальной энергии от смещения, четная.

### Математический пример

Очевидно, степенная функция  $f(x) = x^n$ , где  $n \in \mathbb{N}$ , при четном  $n$  будет четной, а при нечетном  $n$  — нечетной (собственно, отсюда и появилась эта терминология). Произвольный много-

член  $p(x)$ , вообще говоря, не будет ни четной, ни нечетной функцией\*. Однако его можно представить в виде суммы двух многочленов  $p_+(x)$  и  $p_-(x)$ , являющихся соответственно четной и нечетной функциями. Например,

$$p(x) = x^7 + 2x^6 - x^5 - 3x^4 - 13x^2 + x + 17 = p_+(x) + p_-(x),$$

где

$$p_+(x) = 2x^6 - 3x^4 - 13x^2 + 17$$

— сумма одночленов из  $p(x)$ , содержащих  $x$  в четной степени, а

$$p_-(x) = x^7 - x^5 + x$$

— сумма одночленов из  $p(x)$ , содержащих  $x$  в нечетной степени.

Оказывается, что не только многочлен, но и любую функцию с симметричной областью определения можно представить в виде суммы четной и нечетной функций!

**Теорема.** Если функция  $f$  удовлетворяет условию симметрии (С), то ее можно представить в виде суммы двух функций — четной  $f_+(x)$  и нечетной  $f_-(x)$ :

$$f(x) = f_+(x) + f_-(x), \quad (1)$$

области определения которых те же, что у функции  $f$ :  $D(f_+) = D(f_-) = D(f)$ , причем такое представление единственно.

**Доказательство.** Допустим, что функция  $f(x)$  уже представлена в виде (1) и функции  $f_+$  и  $f_-$  удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} f_+(-x) &= f_+(x), \\ f_-(-x) &= -f_-(x). \end{aligned} \quad (2)$$

Подставив в формулу (1) вместо  $x$  значение  $-x$ , из формул (2) получим

$$f(-x) = f_+ - f_-(-x). \quad (3)$$

Складывая равенства (1) и (3), получаем

$$f(x) + f(-x) = 2f_+(x),$$

---

\* Здесь и далее рассматриваются многочлены от одной переменной  $x$ , причем многочлен  $p(x)$  мы отождествляем с функцией  $x \rightarrow p(x)$ .



откуда

$$f_+(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}. \quad (4a)$$

Аналогично, вычитая (3) из (1), находим

$$f_-(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}. \quad (4б)$$

Таким образом, если функция  $f$  представима в виде (1), то функции  $f_+$  и  $f_-$  однозначно отыскиваются по функции  $f$  с помощью формул (4).

Следовательно, если представление (1) существует, то оно единственно.

А теперь — небольшой трюк: для произвольной функции  $f$  определим функции  $f_+$  и  $f_-$  соотношениями (4).

Тогда из формул (4) следует, что, во-первых,  $f_+(x) + f_-(x) = f(x)$ , т. е. (1) выполняется, и, во-вторых, что функции  $f_+$  и  $f_-$  являются, соответственно, четной и нечетной. Например, проверим условие (Н) для функции  $f_-$ . Для произвольного  $x$  имеем

$$\begin{aligned} f_-(-x) &= \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = \\ &= -\frac{f(x) + f(-x)}{2} = -f_+(x), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Четность функции  $f_+$  проверяется точно так же.

**Замечание.** Приведенное доказательство носит, как говорят, конструктивный характер: мы не только доказали существование и единственность представления (1), но и указали формулы (4), по которым можно найти четную и нечетную «части» данной функции.

#### Контрольные вопросы

3. Где в доказательстве использовано предположение о симметричности  $D(f)$ ?

4. Согласно нашей теореме любая функция с симметричной областью определения, в том числе и любая четная (или нечетная) функция, представляется в виде суммы четной и нечетной частей. Найдите функции  $f_+$  и  $f_-$ , если

а)  $f$  — четная функция;

б)  $f$  — нечетная функция.

5. В «математическом примере» мы разложили некоторый многочлен  $p(x)$  в сумму четной и нечетной функций, «собрав» в одну функцию все одночлены, содержащие  $x$  в четной степени, а в другую — одночлены, содержащие  $x$  в нечетной степени.

Выведите это разложение с помощью формул (4).

6. Докажите, что если некоторый многочлен является

а) четной функцией, то он содержит одночлены лишь с четными степенями  $x$ ;

б) нечетной функцией, то он содержит одночлены лишь с нечетными степенями  $x$ .

### Упражнения

1. Даны 11 функций:

$$f_1(x) = \sqrt{x^2 - 1};$$

$$f_2(x) = \sqrt{x + 1};$$

$$f_3(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1};$$

$$f_4(x) = x^2 + \sin x;$$

$$f_5(x) = x^2 \cdot 2^x;$$

$$f_6(x) = x^3 + x^4 - x^2;$$

$$f_7(x) = x^3 + \cos x;$$

$$f_8(x) = x^3 + \lg x;$$

$$f_9(x) = x^3 \sin x;$$

$$f_{10}(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1};$$

$$f_{11} = \lg(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Определите, какие из этих функций — четные, какие — нечетные, а какие — ни четные, ни нечетные (тогда представьте их в виде суммы четной и нечетной функций). Давайте соответствующие доказательства. (При обосновании тех или иных свойств четности не забудьте про замечание после примера 2!).

2. Найдите все четные и все нечетные функции среди:

а) линейных функций

$$f(x) = ax + b;$$

б) квадратичных функций

$$f(x) = ax^2 + bx + c;$$

в) функций вида

$$f(x) = a \cos x + b \sin x.$$

3. Следующие функции представьте в виде суммы четной и нечетной функций:

а)  $f(x) = x^2 + x - \frac{1}{x} + 2;$

б)  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 - x};$

в)  $f(x) = (x^2 + 2x + 1) \lg x;$

г)  $f(x) = 2^x.$

4. Известно, что функция  $f$  нечетна и  $0 \in D(f)$ . Найдите  $f(0)$ .

5. Найдите все функции  $f$ , являющиеся одновременно и четными и нечетными. (Предостережение: таких функций бесконечно много!)

6. Существуют ли всюду определенные функции, являющиеся одновременно

а) четными и возрастающими на  $\mathbb{R}$ ;

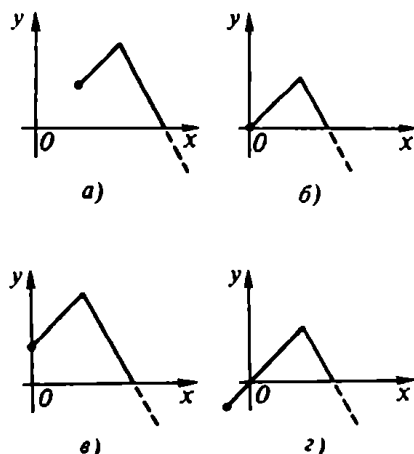


Рис. 4

- б) нечетными и убывающими на  $R$ ;  
 в) нечетными и положительными на  $R$ ?
7. Может ли а) четная; б) нечетная функция иметь в точности  
 1) одну; 2) две; 3) три точки экстремума?
8. а) Докажите, что производная четной функции нечетна, а производная нечетной функции, напротив, четна.  
 б) Верны ли обратные утверждения:  
 1) если  $f'(x)$  — четная функция, то  $f(x)$  — нечетная функция;  
 2) если  $f'(x)$  — нечетная функция, то  $f(x)$  — четная функция?
9. (а — г). Достройте график функции, изображенный на рисунке 4, до графика всюду определенной, непрерывной на  $R$  и

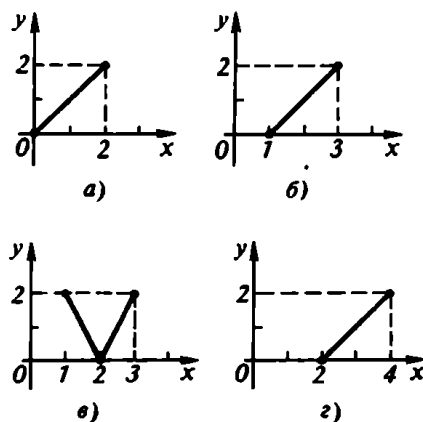


Рис. 5

- 1) четной функции;
- 2) нечетной функции.

В каких случаях это невозможно? В каких случаях это можно сделать несколькими способами?

10. (а — г). Известно, что функция  $f$  всюду определена, четна и периодична с периодом  $T=4$ . Восстановите ее график по участку, изображенному на рисунке 5. В каких случаях это нельзя сделать? В каких случаях это можно сделать, но неоднозначно?

11. Постройте графики следующих функций:

- а)  $y = \arccos(\cos x)$ ;
- б)  $y = \arcsin(\sin x)$ ;
- в)  $y = \arctg(\lg x)$ ;
- г)  $y = \arcsin(\cos x)$ .

# ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

А. Земляков, Б. Ивлев

«Все это было, было, было...»

А. Блок

Эта заметка должна помочь старшеклассникам лучше разобраться в том, что такое периодические функции. Понятие периодичности, весьма важное как в математике, так и в физике, долгое время относилось к числу наиболее трудных в школьном курсе математики. По сути же это понятие не сложно, нужно лишь как следует вникнуть в смысл определения периодичности.

Напомним, что функция  $f$  называется *периодической* функцией, если существует хотя бы одно число  $T \neq 0$  такое, что выполнены следующие два условия:

(А) если  $x \in D(f)$ , то  $x + T \in D(f)$  и  $x - T \in D(f)$ ;

(Б) для любого  $x \in D(f)$

$$f(x) = f(x + T) = f(x - T);$$

при этом число  $T$  называется *периодом* функции  $f$ . Менее формально можно сказать так: периодическими называются такие функции, значения которых повторяются через некоторый промежуток  $T$  значений аргумента:

$$f(x) = f(x + T) = f(x + 2T) = \dots = f(x - T) = f(x - 2T) = \dots$$

(поясните, как из определения — из условий (А) и (Б) — вывести выписанную цепочку равенств). Очевидно, график периодической функции отображается сам на себя при параллельных переносах  $\vec{a} = \vec{r}(T; 0)$  и  $-\vec{a} = \vec{r}(-T; 0)$  на расстояние  $T$  вдоль оси  $Ox$  (см. рисунок 1; это свойство графика периодической функции  $f$  можно было бы принять за определение периодичности  $f$ ; — объясните, почему).

С периодическими или с «приближенно периодическими» процессами приходится часто встречаться как в природе, так и в технике, и именно поэтому важно изучать периодические функции в математике. Примеры таких процессов — смены дня и ночи или времен года, связанные с прибли-

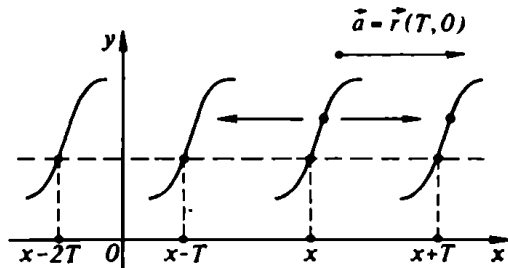


Рис. 1

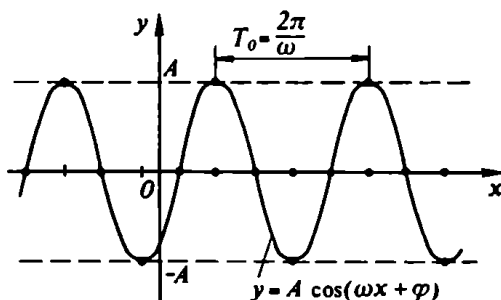


Рис. 2

женно периодическими вращениями Земли около своей оси и около Солнца; приливы и отливы и смена фаз Луны; движение поршня в цилиндре двигателя внутреннего сгорания и т. д.

## Примеры периодических функций

1. В школе подробно изучаются функции вида  $f_{\omega}(x) = A \cos(\omega x + \varphi)$ , где  $A$ ,  $\omega > 0$ , — они связаны с так называемыми *гармоническими колебаниями*. Как известно, функция  $f_{\omega}$  периодическая и имеет периоды

$$\pm \frac{2\pi}{\omega}, \pm 2 \cdot \frac{2\pi}{\omega}, \pm 3 \cdot \frac{2\pi}{\omega}, \dots,$$

т. е. все целые кратные  $nT_0$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) наименьшего положительного периода  $T_0 = 2\pi/\omega$  этой функции (рис. 2).

2. Конечно, любая постоянная функция  $f(x) = c$  (при любом  $x \in \mathbb{R} = D(f)$ ) является периодической, причем ее периодами будут любые числа  $T \neq 0$  (а наименьшего положительного периода не существует).

3. Согласно определению, если функция  $f$  периодична и  $T > 0$  — ее период, то для любой точки  $x_0 \in D(f)$  точки  $x_0 + T$ ,  $x_0 - T \in D(f)$ ; далее, точки  $x_0 + 2T$  и  $x_0 - 2T$  тоже принадлежат  $D(f)$ , и т. д.; таким образом, если  $f$  определена в точке  $x_0$ , то она должна быть определена во всех точках  $x_n = x_0 + nT$ , где  $n \in \mathbb{Z}$  (т. е.  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Значения  $f$  во всех этих точках должны быть одинаковы:  $f(x_n) = c$  не зависит от  $n$ . Если считать, что при всех остальных значениях  $x$  (т. е. при  $x \neq x_n$ ) функция  $f$  вовсе не определена, то мы получаем по существу простейший пример периодической функции:

$$f(x) = \begin{cases} c & \text{при } x = x_n = x_0 + nT, n \in \mathbb{Z}, \\ \text{не определена} & \text{при остальных } x. \end{cases}$$

График  $f$  — бесконечное множество точек вида  $(x_n; c)$  на одинаковых расстояниях друг от друга. Периодами  $f$  являются целые кратные  $nT$  наименьшего положительного периода  $T$  (рис. 3).

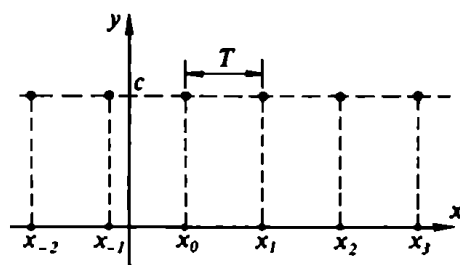


Рис. 3

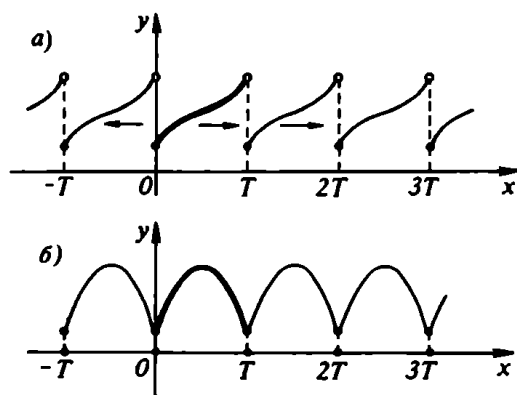


Рис. 4

4. Укажем совсем общий способ построения периодических функций с данным периодом  $T > 0$  — точнее, способ построения их графиков. Зададим функцию  $f$  на полуинтервале  $[0, T)$  произвольно, а затем применим к графику  $f$  над этим промежутком (при  $0 \leq x < T$ ) всевозможные параллельные переносы вида  $\vec{p\vec{a}} = \vec{r}(nT; 0)$ , где  $n$  — целые числа (рис. 4, а, б). Очевидно, при этом получится график периодической функции  $f$  с периодом  $T$ .

**Задача 1.** Может ли периодом функции  $f$ , построенной описанным выше образом, оказаться число  $T_0$ , меньшее  $T$  ( $0 < T_0 < T$ )? Если может, приведите пример.

Наши дальнейшие планы таковы. Во-первых, мы рассмотрим некоторые важные свойства периодических функций. Далее на примерах покажем, как установить периодичность или непериодичность конкретных функций, заданных формулами, и как отыскивать периоды. Наконец, мы сформулируем ряд задач разнообразного характера, касающихся периодических и непериодических функций. (*Непериодическими* — пишется слитно — принято называть функции, не являющиеся периодическими.)

Известные из школьного курса примеры периодических функций (т. е., по сути, тригонометрические функции) приводят к следующему наблюдению: если у периодической функции  $f$  существует *наименьший положительный период*, т. е. такой период  $T_0$ , что любое число  $t$ , большее нуля и меньшее  $T_0$ , уже не является периодом  $f$ , то все остальные периоды функции  $f$  суть целые кратные  $T_0$  — числа вида  $T = nT_0$ , где  $n$  — целое. Это верно для любой периодической функции, у которой существует наименьший положительный период (у периодической функции  $f$  может и не существовать такого периода — см. пример 2, а также задачу 10) в конце этой статьи.

**Теорема 1.** Если  $T_0$  — наименьший положительный период периодической функции  $f$ , то произвольный период  $T$  этой функции  $f$  представляется в виде  $T = nT_0$ , где  $n$  — целое. Обратно, любое число  $T$  указанного вида является периодом  $f$  (при этом удобно считать периодом  $f$  также и число  $0 = 0 \cdot T_0$ ).

**Доказательство.**

*Замечание.* Если числа  $T_1$  и  $T_2$  являются периодами функции  $f$ , то и их сумма  $T_1 + T_2$  и разность  $T_1 - T_2$  будут периодами  $f$  (убедитесь в этом самостоятельно).

Отсюда сразу ясно, что если  $T_0$  — период  $f$ , то все целые



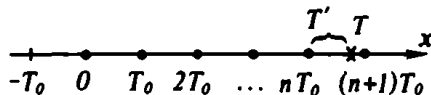


Рис. 5

кратные  $T_0$  числа  $T = nT_0$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , являются периодами  $f$ . Пусть теперь  $T_0$  — наименьший положительный период  $f$ , а  $T$  — произвольный период  $f$ . Допустим, что  $T$  не представляется в виде  $T = nT_0$ , где  $n$  — целое. Тогда число  $T$  заключено строго между какими-то соседними целыми кратными числа  $T_0$  (рис. 5):

$$nT_0 < T < (n+1)T_0.$$

Вычитая из всех частей этого неравенства число  $nT_0$ , получим:

$$nT_0 - nT_0 < T - nT_0 < (n+1)T_0 - nT_0,$$

т. е.  $0 < T' = T - nT_0 < T_0$ .

С одной стороны, поскольку  $T$  — наименьший период  $f$ , число  $T'$ , заключенное между 0 и  $T_0$ , не может быть периодом функции  $f$ ; с другой стороны, согласно сделанному выше замечанию, число  $T' = T - nT_0$  является периодом  $f$  (как разность периодов  $T$  и  $nT_0$ ). Полученное противоречие показывает, что  $T = nT_0$ , и теорема полностью доказана.

Итак, если у функции  $f$  существует наименьший положительный период и нам удалось его найти, то тем самым найдены и все остальные периоды  $f$  — это будут целые кратные наименьшего.

**Важное замечание.** В определении периодической функции условие периодичности (Б)

$$f(x) = f(x + T) = f(x - T)$$

можно заменить на более слабое требование:

(Б<sub>0</sub>) для любого  $x \in D(f)$  выполнено  $f(x) = f(x + T)$ .

Оказывается, из (А) и (Б<sub>0</sub>) следует (Б). В самом деле, пусть функция  $f$  удовлетворяет условию (А) и условию (Б<sub>0</sub>). Тогда из (А) следует, что для  $x \in D(f)$  число  $x_1 = x - T \in D(f)$ . Отсюда по свойству (Б<sub>0</sub>) получаем:

$$f(x_1) = f(x_1 + T),$$

т. е.  $f(x - T) = f(x)$ .

Вернемся к примерам.

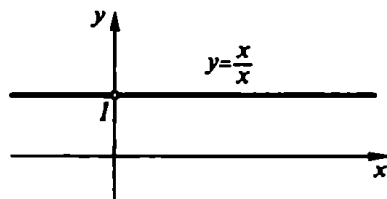


Рис. 6

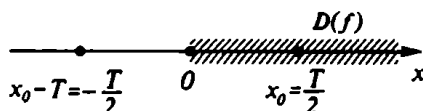


Рис. 7

## 5. Функция

$$f(x) = \frac{x}{x} = \begin{cases} 1 & \text{при } x \neq 0, \\ \text{не определена} & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

непериодична. Действительно, условие (А) не может быть выполнено ни при каком  $T \neq 0$ : число  $x_0 = T \in D(f)$ , а  $x_0 - T = 0 \notin D(f)$  (рис. 6).

6. Функция  $f(x) = \cos \sqrt{x}$  также непериодична — опять не выполнено условие (А). В самом деле, ее область определения — все неотрицательные действительные числа:

$$D(f) = \{x | x \geq 0\},$$

и если  $T > 0$ , то  $x_0 = T/2 \in D(f)$ , но  $x_0 - T = -T/2 < 0$  и не принадлежит  $D(f)$ ; аналогично рассматривается случай  $T < 0$  (рис. 7).

7. Квадратичная функция  $f(x) = x^2$  определена всюду:  $D(f) = \mathbb{R}$ , — и поэтому условие (А) для нее выполнено при любом  $T$ . Если же при некотором  $T \neq 0$  выполнено и условие (Б<sub>0</sub>), то при любом  $x \in \mathbb{R}$  должно быть верно соотношение  $x^2 = (x+T)^2$ . Взяв  $x=0$ , получим:  $0^2 = (0+T)^2$ , т.е.  $T^2 = 0$ , или  $T=0$ ; в противоречие с условием  $T \neq 0$ . Следовательно, условие (Б<sub>0</sub>) не выполнено ни при каком  $T \neq 0$  и функция  $f(x) = x^2$  — непериодическая.

8. Функция  $f(x) = \cos x$  (рис. 8), как известно, периодична: ее периодом является, например,  $T_0 = 2\pi$ . Это наименьший период, так как  $\cos x = 1$  лишь при  $x = 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , т.е. значение 1 функции  $f$  повторяется через  $2\pi$ ; поэтому периода,

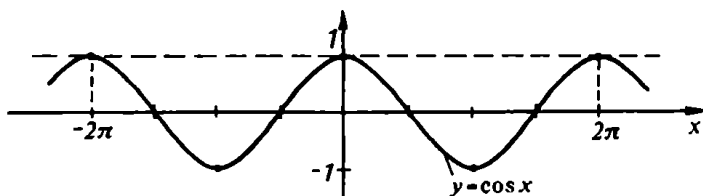


Рис. 8

меньшего  $2\pi$ , у  $f$  не может быть (в противном случае значение 1 функция принимала бы в точках, отстоящих друг от друга менее, чем на  $2\pi$ ).

Из теоремы 1 выводим, что периодами функции  $f(x) = \cos x$  являются целые кратные  $2\pi$  и только они. (Обратите внимание на то, как мы доказывали, что период  $2\pi$  — наименьший. Подобное рассуждение помогает и во многих других случаях.)

**9. Общее замечание.** Если  $f(x)$  — периодическая функция с периодом  $T$ , то, какова бы ни была функция  $F$ , сложная функция  $y = F(f(x))$  является периодической, причем  $T$  будет и ее периодом (обоснуйте это). Например, функции  $\cos^2 x$ ,  $\cos^3 x$ ,  $\sqrt{\cos x}$  (см. рисунки 9—11 — на рисунках 8—11 по техническим причинам на координатных осях выбраны разные масштабы) — периодические с периодом  $2\pi$  (здесь  $F(z) = z^2$ ,  $z^3$ ,  $\sqrt{z}$ , соответственно). Независимо от сформулированного замечания, рассмотрим функцию  $y = \cos^2 x$  и непосредственно проверим для нее условия периодичности (А) и (Б<sub>0</sub>).

**10.** Функция  $f(x) = \cos^2 x$  (рис. 9) всюду определена, поэтому условие (А) выполнено автоматически. Далее,  $f$  имеет  $2\pi$  своим периодом: так как  $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ , то  $\cos^2(x + 2\pi) = \cos^2 x$ , т. е.  $f(x + 2\pi) = f(x)$ .

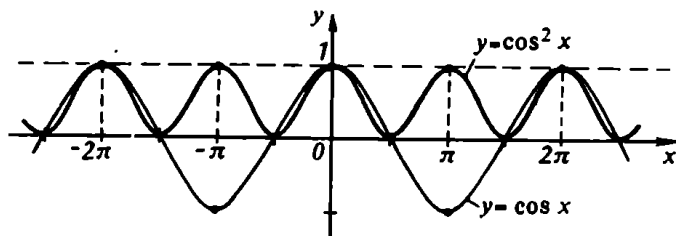


Рис. 9

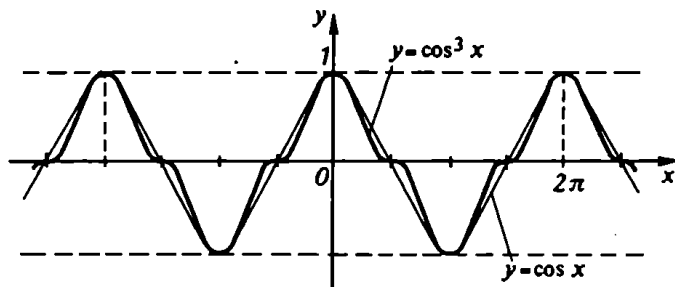


Рис. 10

**Вопрос:** является ли  $T_0 = 2\pi$  наименьшим периодом  $f(x) = \cos^2 x$ ?

Попробуем на него ответить. Рассмотрим те  $x$ , при которых  $f(x) = 1$ , т.е.  $\cos^2 x = 1$ ; тогда  $\cos x = 1$  или  $\cos x = -1$ , откуда  $x = \pi n$ , т.е. значение 1 повторяется через  $\pi$ , а не через  $2\pi$ ! Может быть, наименьшим периодом  $f$  будет  $\pi$ ?

Преобразуем  $\cos^2 x$  по известным формулам:

$$f(x) = \cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}.$$

Функция  $y = \cos 2x$  периодична с периодом  $\pi$  (поясните)\*, следовательно, и функции  $\frac{1}{2} \cos 2x$  и  $\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} = f(x)$  будут иметь период  $\pi$ . Поскольку значение 1 у функции  $f$  повторяется через  $\pi$  (см. выше), число  $\pi$  будет наименьшим периодом  $f$ .

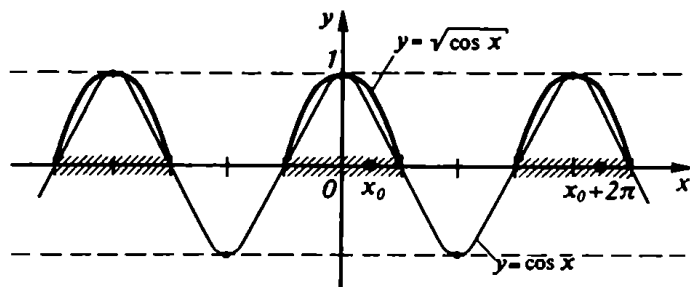


Рис. 11

То же самое можно получить и с помощью формулы приведения:  $\cos(x + \pi) = -\cos x$ , поэтому

$$\cos^2(x + \pi) = (-\cos x)^2 = \cos^2 x.$$

**11. Общие замечания.** Если функция  $f(x)$  периодична с периодом  $T$ , то любая сложная функция вида

$$F(x) = af(Ax + B) + b$$

является периодической, причем ее периодом будет число  $T' = T/A$  (обоснуйте это). Например, функция вида  $a \cos(Ax + B) + b$  периодична с периодом  $2\pi/A$ .

Сформулируем теперь ряд задач.

**Задача 2.** Выясните, какие из указанных ниже функций периодичны, а какие — нет:

а)  $\sin |x|$ ;    б)  $|\sin x|$ ;    в)  $\frac{\sin x}{\sin x}$ .

**Задача 3.** Докажите, что следующие функции неперiodичны:

а)  $\frac{1}{x}$ ;    б)  $\sin \frac{1}{x}$ ;

в)  $\sin((\sqrt{x})^2)$ ;    г)  $x^2 + 3x + 17$ ;

д)  $x^2 + \sin x$ ;    е)  $\sin \sqrt{|x|}$ .

**Задача 4.** Докажите, что следующие функции периодичны, и найдите их наименьший положительный период:

а)  $\sin^2 x$ ;    б)  $\sin^4 x$ ;

в)  $\sin^5 x$ ;    г)  $\sin \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{3}$ ;

д)  $\sin 2x + \sin 3x$ ;    е)  $\sin \frac{x}{\sqrt{2}} + \sin \sqrt{2} x$ .

Очевидно, что если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  периодичны с одинаковым периодом  $T$ , то их сумма  $s(x) = f(x) + g(x)$  тоже будет периодической функцией, причем  $T$  является ее периодом\*.

---

\* Здесь есть небольшая тонкость: область определения суммы  $f(x) + g(x)$  — это пересечение  $D = D(f) \cap D(g)$ , и может случиться так, что  $D = \emptyset$ . Нигде не определенную функцию удобно считать периодической, причем ее периодом следует считать любое число.

**Задача 5.** Функции  $f(x)$  и  $g(x)$  всюду определены и имеют одинаковый наименьший положительный период  $T_0$ . Верно ли, что  $T_0$  является наименьшим и для суммы  $f(x)+g(x)$ ? Придумайте две такие (всюду определенные) функции  $f$  и  $g$ , период суммы которых был бы ровно в 2 раза меньше  $T_0$ .

Пусть периодические функции  $f$  и  $g$  имеют наименьшие положительные периоды  $T_1$  и  $T_2$ , соответственно, и  $T_1 \neq T_2$ .

*Вопрос.* В каком случае у функций  $f$  и  $g$  существует общий (конечно, уже не наименьший) период  $T$ ?

*Ответ.* Если у  $f$  и  $g$  есть общий период  $T$ , то по теореме 1  $T = mT_1 = nT_2$ , где  $m$  и  $n$  — целые; отсюда следует, что  $T_2/T_1 = m/n$  — рациональное число. Обратно, если отношение  $T_2/T_1$  рационально,  $T_2/T_1 = m/n$ , то  $mT_1 = nT_2 = T$  — общий период функций  $f$  и  $g$ .

Все наши рассуждения показывают справедливость такого утверждения.

**Теорема 2.** Если наименьшие положительные периоды периодических функций  $f$  и  $g$  соизмеримы, т. е. отношение  $T_2/T_1$  рационально, то и сумма этих функций  $f(x)+g(x)$  периодична.

Оказывается, что если отношение наименьших периодов всюду определенных и непрерывных функций  $f$  и  $g$  иррационально, то функция  $f+g$  будет непериодической. То же самое можно сказать и о произведении периодических функций (мы ограничимся лишь тем, что приведем несколько соответствующих примеров, общее же доказательство сформулированного утверждения довольно сложно).

**Задача 6.** Докажите, что следующие функции (произведения и суммы периодических!) не являются периодическими:

а)  $\cos x \cdot \cos \sqrt{2}x$ ;

б)  $\cos x + \cos \sqrt{2}x$ ;

в)  $\sin x \cdot \sin \sqrt{2}x$ ;

г)  $\sin x + \sin \sqrt{2}x$ .

**Замечание.** Функции из задачи 6 относятся к очень важному, особенно в физических приложениях, классу почти-периодических функций. Такие функции  $f$  удовлетворяют следующему условию: для любого (сколь угодно малого) числа  $\varepsilon > 0$  существует «почти-период» — число  $T \neq 0$  такое, что при произвольном  $x$  значение  $f(x+T)$  равно  $f(x)$  с точностью до  $\varepsilon$ , т. е.  $|f(x+T) - f(x)| \leq \varepsilon$ . Грубо говоря, это объясняется тем, что иррациональные числа с любой точностью можно приблизить рациональными; заметим, что чем меньше  $\varepsilon$ , тем больше будет «почти-период»  $T$ .

В физике величины измеряются приближенно, поэтому об их иррациональности говорить не приходится. С почти-периодическими процессами в природе сталкиваются тогда, когда рассматривают периодические явления, отношение периодов которых не целое, а дробь с большим знаменателем.

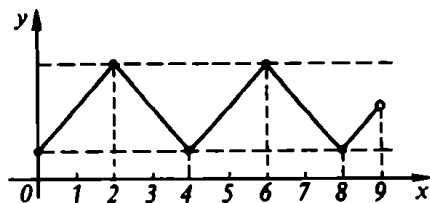


Рис. 12

**Пример.** При составлении календаря одновременно нужно учесть обращение Земли вокруг Солнца (с периодом в 1 астрономический год) и вращение Земли около собственной оси (с периодом 1 сутки). Из соображений удобства календарь должен быть периодическим, причем желательно, чтобы его период был общим периодом того и другого. Отношение года к суткам приблизительно равно  $m = 365,242199$ . Если считать это значение точным, то общий период рассматриваемых процессов чересчур велик — 1 миллион лет! Поэтому еще Юлий Цезарь ввел «почти-период» в 4 года, что соответствует значению  $m \approx 365,25 = 365 \frac{1}{4}$ , а римский папа Григорий XIII в 1582 году узаконил «почти-период» календаря в 400 лет, принятый и в настоящее время. Он соответствует приближению  $m = 365,2425 = 365 \frac{97}{400}$ .

Вернемся к периодическим функциям.

**Задача 7.** Может ли:

а) сумма двух всюду определенных непериодических функций быть периодической функцией?

б) сумма двух всюду определенных непериодической и периодической функций быть периодической функцией?

(К пункту а): придумайте две всюду определенные непериодические функции такие, что их сумма является периодической с наименьшим положительным периодом  $2\pi$ ).

**Задача 8.** Функция  $f$  задана на полуинтервале  $[0; 9)$  своим графиком, как показано на рисунке 12. Доопределите функцию  $f$

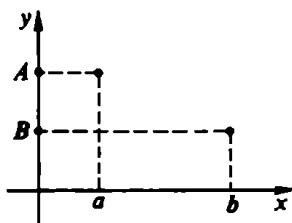


Рис. 13

при всех остальных  $x \in \mathbb{R}$  так, чтобы получилась периодическая функция с наименьшим положительным периодом: а) 4, б) 9, в) 10, г)  $4\pi$ .

**Задача 9.** Функция  $f$  задана в двух точках:  $f(a)=A$ ,  $f(b)=B$ , причем  $A \neq B$  (рис. 13). Доопределите функцию до периодической (не обязательно всюду определенной!). Какие наименьшие положительные периоды могут быть у такой (доопределенной) функции?

**Задача 10.** Существует ли периодическая функция, у которой:  
а) все иррациональные числа являются периодами, а все рациональные не являются?

б) напротив, все рациональные числа являются периодами, а все иррациональные — нет?



# АНАЛИЗ ПОМОГАЕТ АЛГЕБРЕ

А. Звонкин

Довольно часто алгебраическую задачу удастся решить, подыскав и исследовав методами анализа какую-нибудь подходящую вспомогательную функцию.

**Пример 1.** Сколько корней имеет уравнение

$$x^3 - 3x = a? \quad (1)$$

**Решение.** Как известно, существует формула для решения кубического уравнения. Однако эта формула очень громоздка. Нельзя ли найти число корней уравнения, не решая его?

Используя производную, нарисуем график функции  $y = x^3 - 3x$  (рис. 1, а). На том же чертеже нарисуем график функции  $y = a$ , т. е. горизонтальную прямую (на рисунке 1, б изображено сразу несколько таких прямых — для разных значений  $a$ ). Количество корней уравнения (1) есть просто количество точек пересечения нашего графика и прямой\*. Сразу бросается в глаза особая роль прямых  $m$  и  $n$ . Если прямая  $y = a$  лежит между этими прямыми, т. е.  $|a| < 2$ , то она имеет с графиком функции  $f(x) = x^3 - 3x$  три точки пересечения, если выше или ниже ( $|a| > 2$ ) — одну, сами же прямые  $m$  и  $n$  ( $|a| = 2$ ) имеют с графиком две общие точки (одна из них — точка касания).

**Задача 1.** Сколько корней имеет уравнение

$$3x^5 - 50x^3 + 135x = a?$$

**Задача 2.** Сколько корней имеет уравнение

$$x^2 e^x = a?$$

---

\* Прямая действительно пересекает график так, как показано на чертеже. В самом деле, функция  $x \rightarrow x^3 - 3x$  непрерывна и монотонна на каждом из промежутков  $(-\infty; -1]$ ,  $[-1; 1]$ ,  $[1; +\infty)$ , следовательно, ее множество значений на каждом из этих промежутков — промежуток; поэтому, например, для любого  $a \in [-2; 2]$  существует такое  $x_0 \in [-1; 1]$ , что  $f(x_0) = a$ , причем ввиду монотонности функции  $f$  на отрезке  $[-1; 1]$  такое  $x_0$  единственно. В последующих примерах читатель легко проведет подобное рассуждение сам.

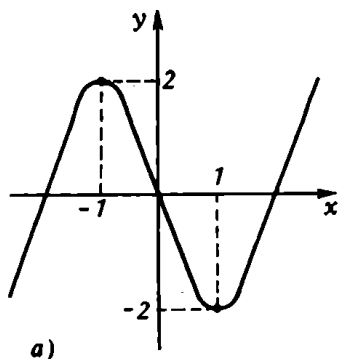
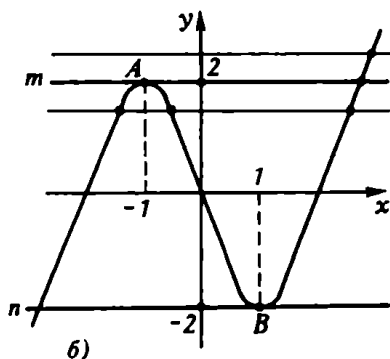


Рис. 1



**Пример 2.** Сколько корней имеет уравнение

$$a^x = x? \quad (2)$$

**Решение.** Рассмотрим пять случаев взаимного расположения графиков  $y = a^x$  и  $y = x$  (рис. 2). Рисунок 2, а соответствует значениям  $a \in (0; 1)$ , рисунок 2, б — значению  $a = 1$ , остальные три рисунка ( $a$  возрастает от рисунка 2, в к рисунку 2, д) — значениям  $a > 1$ . Количество решений уравнения (2) в каждом из пяти случаев видно «невооруженным глазом». Единственное, что по существу осталось узнать, — при каком значении  $a = a_0$  имеет место картинка 2, г, т. е. прямая  $y = x$  касается кривой? Ответить на этот вопрос нам поможет производная.

Пусть  $x_0$  — абсцисса точки касания А (рис. 2, г). Тогда  $f'(x_0) = a^{x_0} \ln a = 1$ . Кроме того,  $a^{x_0} = x_0$ . Получилась система

$$\begin{cases} a^x = x, \\ a^x \ln a = 1. \end{cases}$$

Решим ее. Для этого во второе уравнение вместо  $a^x$  подставим  $x$ , получим  $x = \frac{1}{\ln a}$ . Полученное значение  $x$  подставляем в

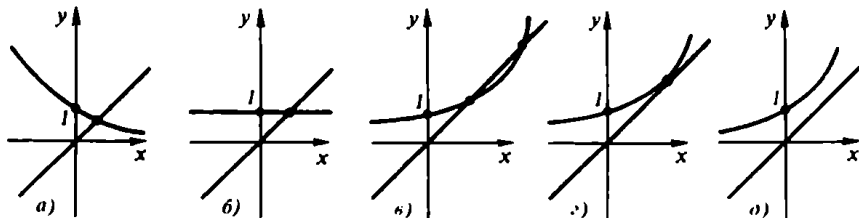


Рис. 2

первое уравнение:  $a^{\frac{1}{\ln a}} = \frac{1}{\ln a}$ ; прологарифмируем и преобразуем:

$$\frac{1}{\ln a} \cdot \ln a = \ln \left( \frac{1}{\ln a} \right) \Leftrightarrow 1 = -\ln(\ln a) \Leftrightarrow \ln a = \frac{1}{e} \Leftrightarrow a = e^{\frac{1}{e}}.$$

Итак,  $a_0 = e^{\frac{1}{e}}$ .

**Задача 3.** Сколько корней имеет уравнение

$$a^x = \log_a x?$$

*Указание.* На рисунке 3 изображены пять случаев взаимного расположения графиков  $y = a^x$  и  $y = \log_a x$ . Для удобства пунктиром изображена также прямая  $y = x$ . Функции  $a^x$  и  $\log_a x$  взаимно обратны, поэтому их графики симметричны относительно этой прямой. Вам остается лишь найти значения  $a_1$  и  $a_2$ .

Особенно интересным нам кажется случай, изображенный на рисунке 3, д. Такая картинка получается, например, при  $a = \frac{1}{16}$ .

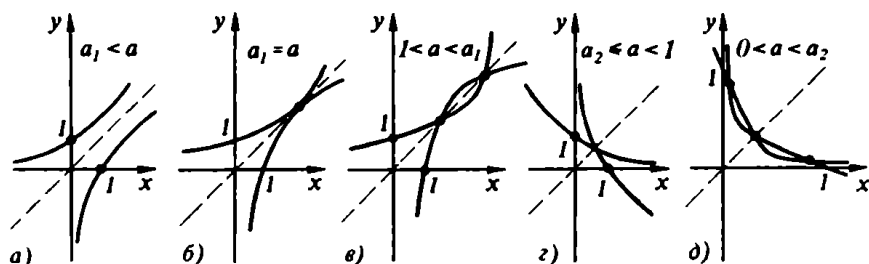


Рис. 3

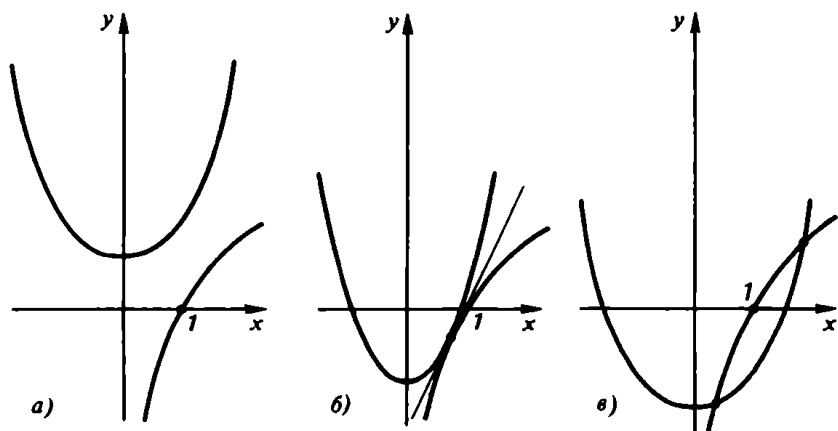


Рис. 4

**Упражнение.** Для  $a = \frac{1}{16}$  найдите координаты точек пересечения.

**Пример 3.** При каких значениях  $a$  существует такое положительное  $b$ , что уравнение

$$x^2 + a = 2b \ln x \quad (3)$$

имеет единственный корень?

**Решение.** Как всегда, начнем с картинки. На рисунке 4 изображены три случая взаимного расположения графиков  $y = x^2 + a$  и  $y = 2b \ln x$  (для  $b > 0$ ). Ясно, что уравнение (3) имеет единственный корень тогда и только тогда, когда эти графики касаются (рис. 4, б). В точке касания совпадают не только значения самих функций  $f(x) = x^2 + a$  и  $g(x) = 2b \ln x$ , но и значения их производных  $f'(x) = 2x$  и  $g'(x) = \frac{2b}{x}$ . Получилась система.

$$\begin{cases} x^2 + a = 2b \ln x, \\ 2x = \frac{2b}{x}. \end{cases}$$

Из второго уравнения этой системы находим  $x = \pm \sqrt{b}$  (напомним, что по предположению  $b > 0$ ). Значение  $x = -\sqrt{b}$  системе не удовлетворяет, так как  $\ln x$  при  $x = -\sqrt{b}$  не определен. Подставляя полученное значение  $x$  в первое уравнение, получаем

$$a = b \ln b - b. \quad (4)$$

Таким образом, графики  $y = x^2 + a$  и  $y = 2b \ln x$  касаются, если и только если выполнено условие (4); при этом касание происходит в точке с абсциссой  $x = \sqrt{b}$ .

Задача свелась к выяснению следующего вопроса: при каких значениях  $a$  существует такое  $b$ , что выполняется равенство  $a = b \ln b - b$ ? Еще одна, эквивалентная, формулировка: найти множество значений функции  $f(b) = b \ln b - b$ .

**Контрольный вопрос.** Почему мы опустили требование положительности  $b$ ?

На координатной плоскости  $Oba$  нарисуем график функции  $b \rightarrow b \ln b - b$  (рис. 5). Теперь ответ на поставленный вопрос «почти ясен»: нужное значение  $b$  существует при  $a \geq a_0$  (значений может быть и два!). Значение  $a_0$  находим из уравнения  $f'(b) = 0$ . Поскольку  $f'(b) = \ln b$ ,  $b_0 = 1$ .

Таким образом,  $a_0 = f(b_0) = -1$ .

**Контрольный вопрос.** Как видно из рисунка 5, если  $a$  принадлежит интервалу  $(-1; 0)$ , то ему соответствуют два значения

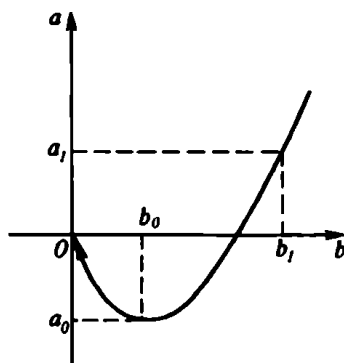


Рис. 5

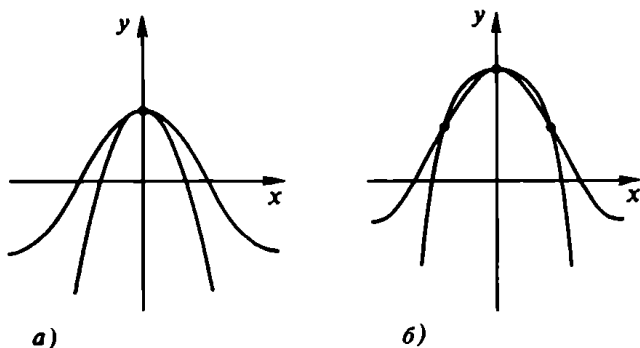


Рис. 6

*b.* Что это означает для графиков  $y = x^2 + a$  и  $y = 2b \ln x$ ? Нарисуйте.

Иногда знание количества корней помогает решить уравнение. Например, если известно, что некоторое уравнение имеет *ровно один* корень, можно попробовать просто угадать его.

**Пример 4.** Решим уравнение  $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$ .

**Решение.** Один из корней этого уравнения легко угадывается:  $x = 0$ . Есть ли еще корни? Обратимся к графику (рис. 6). Вблизи точки  $x = 0$  графики функций  $y = \cos x$  и  $y = 1 - \frac{x^2}{2}$  так похожи друг на друга, что без дополнительного исследования невозможно понять, какой из рисунков, 6, а или 6, б — правильный. Попробуем доказать, что для всех  $x \neq 0$  справедливо неравенство  $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$  (т. е. равенство невозможно).

Пусть  $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$ . Эта функция четна (т. е.

$f(x) = f(-x)$ ), поэтому рассмотрим только положительные значения  $x$ . Поскольку  $f(0) = 0$ , для доказательства неравенства  $f(x) > 0$  при  $x > 0$  достаточно установить, что  $f$  *возрастает* на полупрямой  $[0; +\infty]$ . Учитывая, что  $f$  непрерывна при  $x = 0$ , достаточно установить, что  $f'(x) > 0$  при  $x > 0$ . Поскольку  $f'(x) = x - \sin x$ , неравенство  $f'(x) > 0$  равносильно неравенству  $\sin x < x$ , которое при  $x > 0$  очевидно.

Последний пример, который мы рассмотрим, касается обобщения неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим. Легко доказать, что при  $x > 0$ ,  $y > 0$  имеет место неравенство  $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ , причем равенство достигается

тогда и только тогда, когда  $x = y$ . Запишем это неравенство в таком виде:

$$x^{1/2} \cdot y^{1/2} \leq \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y.$$

Напрашивается следующее обобщение:

**Пример 5.** Пусть положительные числа  $a$  и  $b$  таковы, что  $a + b = 1$ . Докажем, что для всех  $x > 0$ ,  $y > 0$  справедливо неравенство

$$x^a y^b \leq ax + by,$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда  $x = y$ .

**Решение.** Произведем следующие равносильные преобразования неравенства (5): заменим  $b$  на  $1 - a$ , перенесем все члены в одну часть и поделим обе части на  $y$  (поскольку  $y > 0$ , знак неравенства сохранится). Мы получим неравенство

$$a \cdot \frac{x}{y} - \left(\frac{x}{y}\right)^a + 1 - a \geq 0.$$

Обозначим  $\frac{x}{y} = t$ ; заметим, что  $t > 0$ . Осталось доказать, что при  $t > 0$  и  $a \in (0; 1)$  имеет место неравенство

$$at - t^a + 1 - a \geq 0,$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда  $t = 1$ . Это доказательство мы оставим в виде упражнения читателю. (Указание. Функция  $at - t^a + 1 - a$  при  $t = 1$  имеет минимум).

### Задачи

4. Сколько корней имеет уравнение

а)  $e^x = ax$ ?

б)  $3x^4 + 4x^3 - 36x^2 = a$ ?

в)  $\frac{x}{\ln x} = a$ ?

5. Решите (одно уравнение с двумя неизвестными):

а)  $\frac{1}{x} + 2\sqrt{x} = 3y(1 - \ln y)$ ;

б)  $\frac{\ln x}{x} = e^{\cos y}$ ;

в)  $4^x + 1 = 2^{x+1} \cdot \sin y$ .

6. Нарисуйте на плоскости  $(p, q)$  множества значений  $(p, q)$ , при которых уравнения

а)  $x^3 = 3p^2x + q$ .

б)  $p^x = x^q (x > 0)$

имеют 0, 1, 2, ... решений относительно  $x$ .

7. Решите уравнения

а)  $\ln x = x - 1$ ;

б)  $(x-1)e^x \cdot x^2 - 3x + 2 = 0$ ;

в)  $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3$ .

8. Определите (без помощи таблиц), какое число больше —  $e^\pi$  или  $\pi^e$ .

# ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

*М. Балк, Ю. Ломакин*

Для доказательств неравенств особенно полезна следующая

**Теорема 1.** Если функция  $f$  имеет положительную производную в каждой точке интервала  $(a; b)$ , то эта функция возрастает на  $(a; b)$ . Если функция  $f$  имеет отрицательную производную в каждой точке интервала  $(a; b)$ , то  $f$  убывает на  $(a; b)$ . Если дополнительно известно, что  $f$  непрерывна в каждой точке полуинтервала  $(a; b)$ , то возрастание (или, соответственно, убывание) имеет место на всем этом полуинтервале\*.

Начнем с двух примеров на применение этой теоремы: первый — простой, второй — посложнее.

**Пример 1.** Докажем, что при  $x > 1$

$$x^2 - 1 > 2 \ln x.$$

Сохраняется ли то же неравенство при  $0 < x < 1$ ?

**Решение.** Рассмотрим функцию  $f(x) = x^2 - 1 - 2 \ln x$ . Имеем

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2}{x} (x^2 - 1) > 0$$

при  $x > 1$ .

Поэтому  $f$  возрастает на  $(1; +\infty)$ . Если мы учтем еще, что функция  $f$  непрерывна на  $[1; +\infty)$  (т.е. в каждой точке этого промежутка), то возрастание  $f$  имеет место на  $[1; +\infty)$ . Поэтому при  $1 < x < +\infty$  будет  $f(x) > f(1)$ , т.е.  $x^2 - 1 - 2 \ln x > 0$ ,  $x^2 - 1 > 2 \ln x$ .

Рассуждая аналогично, можно убедиться, что  $f'(x) < 0$  на  $(0; 1)$ , так что  $f$  убывает на  $(0; 1)$ . Так как  $f$  непрерывна на  $(0; 1]$ , убывание имеет место на  $(0; 1]$ . Поэтому при  $0 < x < 1$

---

\* Аналогичное утверждение остается верным, если вместо полуинтервала  $[a; b)$  брать полуинтервал  $(a; b]$  или отрезок  $[a; b]$ .



имеем  $f(x) > f(1)$ , т. е.  $x^2 - 1 - 2\ln x > 0$ . Итак,  $x^2 - 1 > 2\ln x$  при  $0 < x < 1$ .

**Пример 2.** Выясним, что больше:  $79^{3/5} + 1900^{3/5}$  или  $1979^{3/5}$ .

**Решение.** Решим более общую задачу: что больше,  $a^p + b^p$  или  $(a+b)^p$ , если  $0 < a < b$  и  $0 < p < 1$ ? Рассмотрим на  $(0; +\infty)$  функцию  $f(x) = (a+x)^p - (a^p + x^p)$ .

Имеем:

$$f'(x) = p(a+x)^{p-1} - px^{p-1} = p \left( \left( \frac{1}{a+x} \right)^{1-p} - \left( \frac{1}{x} \right)^{1-p} \right) < 0$$

при  $0 < x < +\infty$ . Значит,  $f$  на  $(0; +\infty)$  убывает. Поэтому из  $0 < a < b$  следует, что  $f(b) < f(a)$ , т. е.

$$(a+b)^p - (a^p + b^p) < (a+a)^p - (a^p + a^p) = a^p(2^p - 2) < 0,$$

$$a^p + b^p > (a+b)^p.$$

В частности,  $79^{3/5} + 1900^{3/5} > 1979^{3/5}$ .

Для решения дальнейших примеров нам потребуется такое следствие из теоремы 1:

**Теорема 2.** Пусть каждая из функций  $f$  и  $g$  непрерывна в каждой точке полуинтервала  $[a; b)$  и имеет производную в каждой точке интервала  $(a; b)$ . Для того чтобы всюду на интервале  $(a; b)$  было верно неравенство

$$f(x) < g(x),$$

достаточно, чтобы одновременно выполнялись два условия:

$$I. f'(x) < g'(x) \text{ всюду на } (a; b), \quad (2)$$

$$II. f(a) \leq g(a). \quad (3)$$

**Доказательство.** Функция  $F(x) = g(x) - f(x)$  непрерывна на  $[a; b)$ , причем  $F(a) \geq 0$  и  $F'(x) > 0$  на  $(a; b)$ . По теореме 1 функция  $F$  возрастает на  $[a; b)$ , так что при  $a < x < b$  имеем  $F(x) > F(a) \geq 0$ , т. е.  $f(x) < g(x)$  всюду на  $(a; b)$ \*.

Применение теоремы 2 мы тоже проиллюстрируем на двух примерах.

---

\* Если дополнительно потребовать еще непрерывность функций  $f$  и  $g$  в точке  $b$ , то (как ясно из доказательства) неравенство (1) будет верно в точке  $b$ . Можно доказать, что теорема 2 остается верной и в том случае, когда строгое неравенство (2) нарушается (заменяется равенством  $f'(x) = g'(x)$ ) в конечном числе точек (или даже в бесконечном числе точек, если только такие точки не заполняют какой-либо промежуток вида  $(a; c)$ , где  $a < c \leq b$ ).

**Пример 3.** Докажем, что при  $x > 0$

$$\ln(1+x) < x. \quad (4)$$

**Решение.** Дифференцируя (4), получим

$$\frac{1}{1+x} < 1,$$

что, очевидно, верно на  $(0; +\infty)$ . Кроме того,  $\ln(1+0)=0$ . Следовательно, согласно теореме 2 неравенство (4) верно при  $0 < x < +\infty$ .

**Пример 4.** Проверим, справедливо ли при  $x_1 > x_2 > 0$  неравенство

$$\frac{x_1 - x_2}{\ln \frac{x_1}{x_2}} < \frac{1}{2}(x_1 + x_2). \quad (5)$$

**Решение.** Мы можем перейти от неравенства с двумя переменными к неравенству с одним переменным, если положим  $x = x_1/x_2$ . Тогда (5) принимает вид

$$\frac{x-1}{\ln x} < \frac{1}{2}(x+1). \quad (6)$$

Из  $x_1 > x_2 > 0$  вытекает  $x > 1$ . Дифференцировать дробь, у которой  $\ln x$  в знаменателе, неудобно. Перепишем поэтому неравенство (6) в такой равносильной форме:

$$\frac{x-1}{x+1} < \frac{1}{2} \ln x. \quad (7)$$

Чтобы решить, верно ли это неравенство, выясним, верно ли неравенство, которое возникает при его почленном дифференцировании. Таким образом, мы должны рассмотреть неравенство

$$\frac{2}{(x+1)^2} < \frac{1}{2x} \quad (8)$$

или равносильное ему неравенство

$$(x-1)^2 > 0.$$

Последнее при  $x > 1$  верно и, следовательно, при этих  $x$  верно (8). Далее, при  $x=1$  обе части неравенства (7) принимают равные (нулевые) значения. Видим, что условия теоремы 2 соблюдены, так что неравенство (7) верно, а вместе с ним верны (6) и (5).

Иногда при доказательстве неравенства полезно применить

почленное дифференцирование не один, а несколько раз. Точнее говоря, иногда полезно воспользоваться следующим следствием из теоремы 2\*.

**Теорема 3.** Пусть каждая из функций  $f$  и  $g$  непрерывна на полуинтервале  $[a; b)$  и имеет в каждой точке интервала  $(a; b)$  производную порядка  $n$ . Для того чтобы было верно неравенство

$$f(x) < g(x) \text{ на } (a; b), \quad (9)$$

достаточно, чтобы одновременно выполнялись такие условия:

I. Выполняется неравенство, получающееся из неравенства (9) путем  $n$ -кратного дифференцирования, т. е. всюду на  $(a; b)$

$$f^{(n)}(x) < g^{(n)}(x); \quad (10)$$

$$\text{II. } f(a) \leq g(a), \\ f'(a) \leq g'(a),$$

.....

$$f^{(n-2)}(a) \leq g^{(n-2)}(a), \\ f^{(n-1)}(a) \leq g^{(n-1)}(a).$$

**Доказательство.** Так как  $(f^{(n-1)}(x))' < (g^{(n-1)}(x))'$  на  $(a; b)$  (см. (10)) и  $f^{(n-1)}(a) \leq g^{(n-1)}(a)$ , согласно теореме 2 имеем  $f^{(n-1)}(x) < g^{(n-1)}(x)$  всюду на  $(a; b)$ . Но это значит, что  $(f^{(n-2)}(x))' < (g^{(n-2)}(x))'$  всюду на  $(a; b)$ . Кроме того, по условию,  $f^{(n-2)}(a) \leq g^{(n-2)}(a)$ . Поэтому по теореме 2 получим  $f^{(n-2)}(x) < g^{(n-2)}(x)$  всюду на  $(a; b)$ . Повторяя аналогичные рассуждения, мы после конечного числа шагов убедимся, что всюду на  $(a; b)$  справедливы строгие неравенства  $f^{(n-3)}(x) < g^{(n-3)}(x)$ , ...,  $f''(x) < g''(x)$ ,  $f'(x) < g'(x)$  и наконец,  $f(x) < g(x)$ , что и требовалось доказать.

**Пример 5.** Докажем, что при  $x \neq 0$  справедливо неравенство

$$e^x + e^{-x} > 2 + x^2. \quad (11)$$

**Решение.** Рассмотрим сначала случай  $x > 0$ . Будем дифференцировать (11) почленно несколько раз и посмотрим, не получим ли неравенство, справедливость которого не вызывает сомнения. Получаем последовательно:

$$e^x - e^{-x} > 2x; \quad e^x + e^{-x} > 2; \quad e^x - e^{-x} > 0.$$

---

\* Производная от производной функции  $f$  называется ее второй производной и обозначается через  $f''$ , аналогично определяются третья, четвертая производные и вообще производная любого порядка  $n$  (обозначение:  $f^{(n)}$ ).

Последнее неравенство при  $x > 0$ , очевидно, верно. Кроме того, при  $x = 0$  верны равенства  $e^0 + e^{-0} = 2 + 0^2$ ,  $e^0 - e^{-0} = 2 \cdot 0$ ,  $e^0 + e^{-0} = 2$ . В силу теоремы 3 неравенство (11) верно при  $x > 0$ . Так как при замене  $x$  на  $-x$  обе части неравенства (11) не изменятся, то это неравенство верно и для всех  $x < 0$ .

### Упражнения

Проверьте справедливость следующих неравенств:

1.  $e^x > 1 + x$  при  $x \neq 0$ ;

2.  $(p+q)^6 < 32(p^6 + q^6)$  при  $p > 0$ ,  $q > 0$ ,  $p \neq q$ ;

3.  $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$  при  $x > 0$ ;

4.  $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$  при  $x > 1$ ;

5.  $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$  при  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ;

6.  $\sin x < \frac{1}{2}x(\pi - x)$  при  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ;

7.  $2ab \ln \frac{b}{a} < b^2 - a^2$  при  $0 < a < b$ ;

8.  $e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2$  при  $x > 0$ ;

9.  $\ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$  при  $x > 0$ .

10. В окружность с радиусом  $R$  вписан правильный  $n$ -угольник с периметром  $p_n$  и около нее описан правильный  $n$ -угольник с периметром  $P_n$ . Докажите следующее неравенство (принадлежащее известному физику и математику Христиану Гюйгенсу):  $2p_n + P_n > 6\pi R$ .

# ПРОИЗВОДНАЯ ЛОГАРИФМА

*О. Ивашев-Мусатов*

В этой заметке мы получим формулу для производной логарифмической функции непосредственно из определения производной — нахождением соответствующего предела.

Но вначале определим

## Число $e$

Рассмотрим *криволинейную трапецию*, ограниченную графиком функции  $y = \frac{1}{x}$ , отрезком  $[1; t]$  оси  $Ox$  и прямыми  $x=1$ ,  $x=t$  (рис. 1). Площадь этой криволинейной трапеции есть функция от  $t$  — обозначим ее через  $S(t)$ . Эта функция на промежутке  $[1; +\infty)$  возрастает и непрерывна. Непрерывность  $S(t)$  можно вывести прямо из определения непрерывной функции. Попробуйте это сделать.

Поскольку  $S(2) < 1$  (рис. 2), а  $S(4) > 1$  (рис. 3;  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1$ ), то между числами 2 и 4 существует единственное число — его обозначают буквой  $e$ , — такое, что  $S(e) = 1$ .

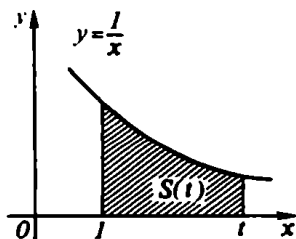


Рис. 1

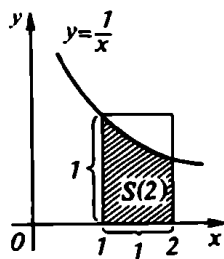


Рис. 2

Так как  $e > 0$  и отлично от 1, могут быть определены логарифмы по основанию  $e$ . Эти логарифмы называются *натуральными* и обозначаются  $\ln$ , т. е.  $\ln a = \log_e a$ . Так как  $e > 1$ , функция  $y = \ln x$  на промежутке  $(0; +\infty)$  возрастает.

## Два важных неравенства

Докажем теперь, что для любого натурального числа  $n$  выполнено неравенство

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}. \quad (1)$$

Из неравенства (1) непосредственно следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

(именно так определяется число  $e$  в вузовских курсах математического анализа).

Действительно, возьмем любое число  $\varepsilon > 0$  и положим  $N = \lceil e/\varepsilon \rceil$ . Тогда для любого натурального  $n > N$  выполнено неравенство  $n > e/\varepsilon$  и

$$\begin{aligned} \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \right| &= e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \\ &- \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n} - 1\right) < \frac{e}{n} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Зафиксируем любое натуральное число  $n$ , положим  $q = 1 + \frac{1}{n}$  и рассмотрим ступенчатый многоугольник с основа-

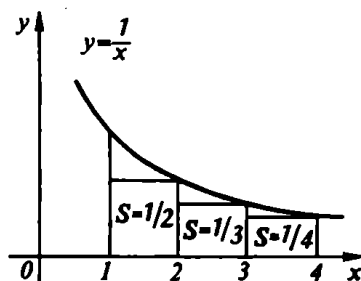


Рис. 3

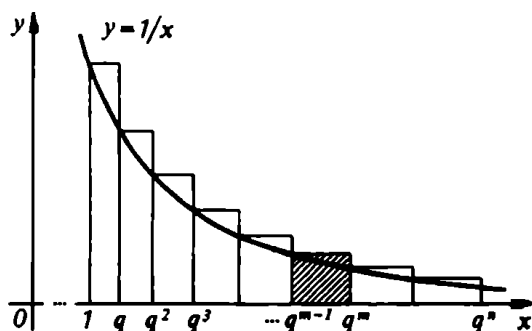


Рис. 4

нием  $[1; q^n]$ , содержащий рассматриваемую криволинейную трапецию с тем же основанием (многоугольник на рисунке 4).

Этот многоугольник состоит из  $n$  прямоугольников (один из них заштрихован) одинаковой площади: площадь каждого из них равна:

$$\frac{1}{q^n - 1} (q^n - q^{n-1}) = q - 1 = \frac{1}{n}.$$

Таким образом, площадь этого ступенчатого многоугольника равна 1, так что  $S(q^n) < 1$ , откуда  $q^n < e$ ; — левая часть неравенства (1) доказана.

Теперь рассмотрим ступенчатый многоугольник с основанием  $[1; q^{n+1}]$ , находящийся внутри нашей криволинейной трапеции с основанием  $[1; q^{n+1}]$  (многоугольник на рисунке 5).

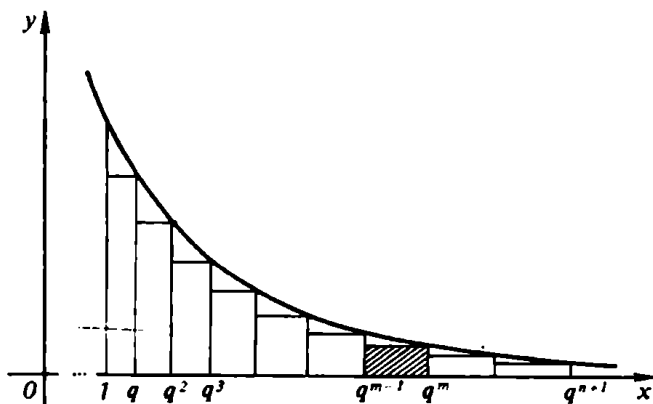


Рис. 5

Мы видим, что он состоит из  $n+1$  прямоугольников, площадь каждого из которых равна  $\frac{1}{n+1}$ , так что площадь этого ступенчатого многоугольника также равна 1. Поскольку он находится внутри трапеции, получим  $S(q^{n+1}) > 1$ ; поэтому  $e < q^{n+1}$ , и правая часть неравенства (1) также доказана.

Из неравенства (1) логарифмированием по основанию  $e > 1$  получается неравенство, которое в дальнейшем и будет для нас основным:

$$\frac{1}{n+1} < \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{n}. \quad (2)$$

### Замечательный предел

Докажем, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Чтобы доказать это соотношение, нужно по определению предела для любого числа  $\varepsilon > 0$  подобрать такое число  $\delta$ , чтобы из неравенства  $0 < |x| < \delta$  следовало бы неравенство

$$\left| \frac{\ln(1+x)}{x} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Подбор числа  $\delta$  проведем так. Если число  $x$  удовлетворяет неравенству  $0 < |x| < 0,5$ , возьмем натуральное число  $n = [1/|x|] > 2$ .

При  $x > 0$  будет  $\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}$  и потому (в силу неравенства (2))

$$\frac{\ln(1+x)}{x} > n \ln \left( 1 + \frac{1}{n+1} \right) > \frac{n}{n+2} = 1 - \frac{2}{n+2},$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x} < (n+1) \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) < \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}.$$



При  $x < 0$  будет  $-\frac{1}{n} \leq x < -\frac{1}{n+1}$  и потому (в силу неравенства (2))

$$\begin{aligned} \frac{\ln(1+x)}{x} &> -n \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \\ &= n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\ln(1+x)}{x} &< -(n+1) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = (n+1) \ln \frac{n}{n-1} = \\ &= (n+1) \ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) < \frac{n+1}{n-1} = 1 + \frac{2}{n-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, для любого  $x$ , удовлетворяющего неравенствам  $0 < |x| < 0,5$ , выполнено неравенство

$$\left| \frac{\ln(1+x)}{x} - 1 \right| < \frac{2}{n-1}.$$

Значит, если  $n$  таково, что  $\frac{2}{n-1} < \varepsilon$ , то для соответствующих  $x$  будет выполнено неравенство (3). Но тогда

$$\begin{aligned} \frac{2}{n-1} < \varepsilon &\Leftrightarrow \frac{2}{\varepsilon} < n-1 \Leftrightarrow n+1 > \frac{2}{\varepsilon} + 2 = \frac{2+2\varepsilon}{\varepsilon} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{\varepsilon}{2+2\varepsilon}. \end{aligned}$$

И если мы возьмем  $\delta = \frac{\varepsilon}{2+2\varepsilon}$ , то для любого  $x$ , удовлетворяющего неравенству  $0 < |x| < \delta$ , имеем:  $0 < |x| < \frac{\varepsilon}{2+2\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2\varepsilon} < 0,5$  и

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} < |x| < \delta = \frac{\varepsilon}{2+2\varepsilon} &\Rightarrow n+1 > \frac{2}{\varepsilon} + 2 \Rightarrow n-1 > \\ &> \frac{2}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{2}{n-1} < \varepsilon, \end{aligned}$$

и поэтому выполнено неравенство (3).

## Производная логарифма

По определению производной

$$\ln'x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

(см. замечательный предел).

$$\text{Итак, } \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

## Площадь — это интеграл

Рассмотрим криволинейную трапецию на рисунке 1. Эта фигура ограничена графиком функции  $y=f(x)$ , определенной на отрезке  $[a; b]$ , прямыми  $x=a$ ,  $x=b$  и осью абсцисс  $y=0$ . Ее площадь  $S$  равна

$$F(b) - F(a),$$

где  $F$  — какая-нибудь первообразная для функции  $f$ . Вспомнив определение интеграла, формулу для вычисления площади можно переписать так:

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (1)$$

**Пример 1.** Найдём площадь фигуры, ограниченной линиями  $y=1-x^2$  и  $y=0$ .

Можно считать, что эта фигура ограничена осью абсцисс, прямыми  $x=-1$ ,  $x=1$  и графиком функции  $y=1-x^2$  (рис. 2), поэтому по формуле (1) ее площадь

$$S = \int_{-1}^1 (1-x^2) dx.$$

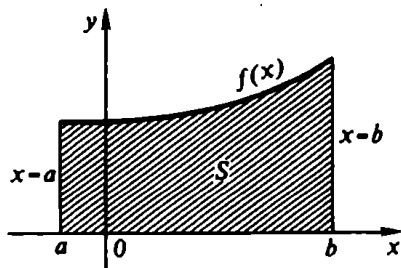


Рис. 1

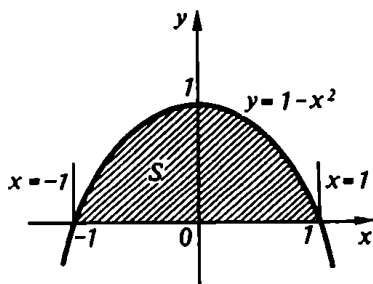


Рис. 2

Так как первообразной для функции  $f(x)=1-x^2$  является функция

$$F(x)=x-\frac{x^3}{3},$$

то

$$S=\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^1=\frac{4}{3}.$$

Вы видите, что в этом примере нам не пришлось прибегать ни к каким «ухищрениям»; для решения задачи оказалось достаточным воспользоваться готовыми формулами. Но так бывает далеко не всегда.

## Аддитивность

Решать более сложные задачи на вычисление площадей помогает свойство *аддитивности* площади. Оно «разрешает» разбить данную фигуру на части и подсчитать площадь всей фигуры как сумму площадей этих частей.

**Пример 2.** Найдём площадь фигуры, ограниченной линиями  $y=x$ ,  $y=1/x$ ,  $y=0$ ,  $x=e$ .

Эту фигуру (рис. 3) можно рассматривать как криволинейную трапецию, ограниченную осью абсцисс, прямыми  $x=0$  и  $x=e$  и графиком функции, которая на отрезке  $[0; 1]$  равна  $x$ , а на отрезке  $[1; e]$  равна  $1/x$ . Однако написать первообразную для такой функции нелегко.

Поэтому разобьём данную криволинейную трапецию прямой  $x=1$  на две части (рис. 3). Их площади сразу находятся по формуле (1):

$$S_1=\int_0^1 x \, dx, \quad S_2=\int_1^e \frac{1}{x} \, dx.$$

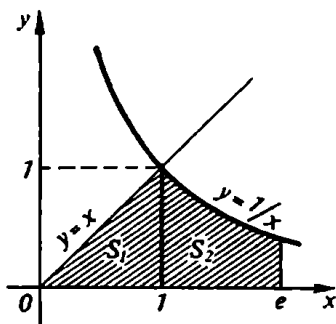


Рис. 3

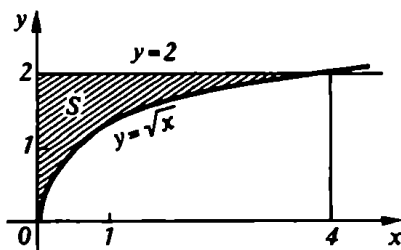


Рис. 4

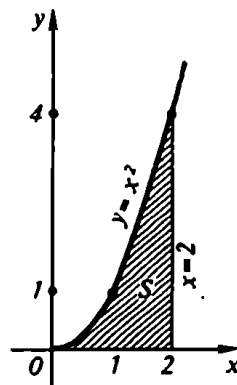


Рис. 5

Так как первообразной для функции  $f_1(x)=x$  является функция  $F_1(x)=x^2/2$ , а первообразной для функции  $f_2(x)=1/x$  является (при  $x>0$ ) функция  $F_2(x)=\ln x$ , то

$$S_1 = \int_0^1 x \, dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2},$$

$$S_2 = \int_1^2 \frac{1}{x} \, dx = \ln x \Big|_1^2 = 1,$$

и по свойству аддитивности площади

$$S = S_1 + S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

## Инвариантность

В более сложных задачах помогает еще одно свойство площади, которое называется *инвариантностью относительно перемещений*: равные фигуры имеют равные площади.

**Пример 3.** Найдем площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = \sqrt{x}, \quad y = 2, \quad x = 0.$$

Эта фигура (рис. 4) станет криволинейной трапецией, если поменять местами оси абсцисс и ординат. Для этого отразим весь рисунок относительно прямой  $y=x$ . График функции  $y=\sqrt{x}$  отобразится при этом в график обратной функции  $y=x^2$ , и мы получим фигуру, изображенную на рисунке 5. А поскольку симметричные фигуры имеют равные пло-

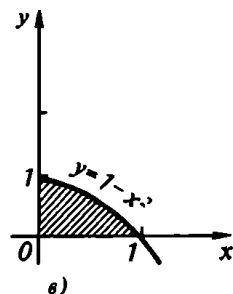
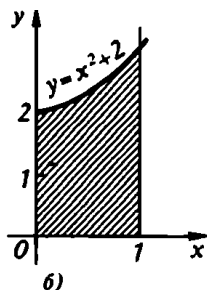
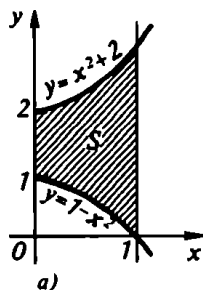


Рис. 6

щади, мы получаем

$$S = \int_0^2 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

Другое решение этой задачи можно получить, заметив, что фигура, закрашенная на рисунке 4, дополняется (снизу) до прямоугольника со сторонами 2 и 4 криволинейной трапецией, соответствующей функции  $y = \sqrt{x}$  на отрезке  $[0; 4]$ . Поэтому

$$S = 2 \cdot 4 - \int_0^4 \sqrt{x} dx = 8 - \left. \frac{2}{3} x^{3/2} \right|_0^4 = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}.$$

Аддитивность и инвариантность площади не только облегчают нахождение площади криволинейной трапеции, но и позволяют находить площади более сложных фигур, например, ограниченных графиками некоторых функций и сверху, и снизу — площади «бикриволинейных трапеций».

**Пример 4.** Найдём площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2 + 2$ ,  $y = 1 - x^2$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ .

Криволинейная трапеция, ограниченная прямыми  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$  (осью абсцисс) и графиком функции  $y = 1 - x^2$  дополняет данную фигуру до криволинейной трапеции, ограниченной прямыми  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$  и графиком функции  $y = x^2 + 2$  (рис. 6, а). Иными словами, данную в условии фигуру можно рассматривать как разность двух криволинейных трапеций (рис. 6, б, в). Поэтому её площадь

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (x^2 + 2) dx - \int_0^1 (1 - x^2) dx = \left( \frac{x^3}{3} + 2x \right) \Big|_0^1 - \\ &\quad - \left( x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{7}{3} - \frac{2}{3} = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Это рассуждение легко обобщается следующим образом. Пусть  $f$  и  $g$  — две непрерывные функции, определенные на отрезке  $[a; b]$ , причем для всех  $x \in [a; b]$  выполнено неравенство  $f(x) \geq g(x)$ . Тогда площадь фигуры, ограниченной графиками функций  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  и прямыми  $x = a$ ,  $x = b$  (рис. 7), равна

$$S = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx.$$

А поскольку разность интегралов двух функций (на одном и том же отрезке) равна интегралу от их разности, то выражение для  $S$  можно записать так:

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx. \quad (2)$$

Если  $g(x) \geq 0$  при  $x \in [a; b]$ , то формула (2) выводится так же, как в примере 4. Если же в некоторых точках  $g(x) < 0$ , то прибавим к обеим функциям одну и ту же константу  $k$ , которую выберем настолько большой, чтобы графики функций  $y = f(x) + k$  и  $y = g(x) + k$  оказались выше оси абсцисс (рис. 8). Фигура на рисунке 7 получается из фигуры на рисунке 8 параллельным переносом и потому имеет такую же площадь. К фигуре на рисунке 8 применима формула (2):

$$S = \int_a^b ((f(x) + k) - (g(x) + k)) dx.$$

Но

$$(f(x) + k) - (g(x) + k) = f(x) - g(x).$$

Отсюда получаем формулу (2) и для фигуры на рисунке 7.

Если графики непрерывных функций  $f$  и  $g$ , заданных на

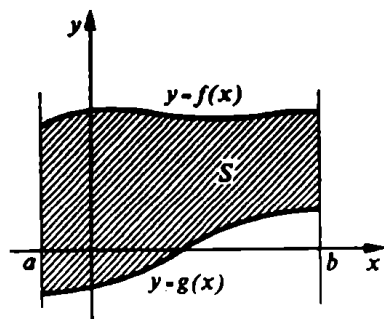


Рис. 7

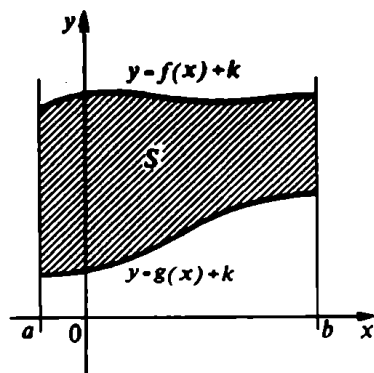


Рис. 8

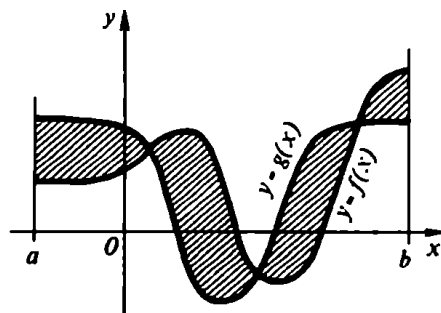


Рис. 9

отрезке  $[a; b]$ , пересекаются, и местами  $f(x) > g(x)$ , а местами  $g(x) > f(x)$  (рис. 9), то площадь фигуры, ограниченной графиками функций  $f$  и  $g$  и прямыми  $x=a$ ,  $x=b$  равна

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Эта формула обобщает формулу (2) (докажите ее самостоятельно).

**Пример 5.** Найдём площадь  $S$  фигуры, заключённой между линиями  $y = x^3 - 3x$  и  $y = x$ .

Данные линии пересекаются в точках с координатами  $(-2; -2)$ ,  $(0; 0)$  и  $(2; 2)$  (рис. 10), причём  $(x^3 - 3x) - x = x^3 - 4x$  и  $|x^3 - 4x| = x^3 - 4x$  при  $-2 \leq x \leq 0$ ,  $|x^3 - 4x| = 4x - x^3$  при  $0 \leq x \leq 2$ . Поэтому по формуле (3)

$$S = \int_{-2}^2 |(x^3 - 3x) - x| dx = \int_{-2}^2 |x^3 - 4x| dx =$$

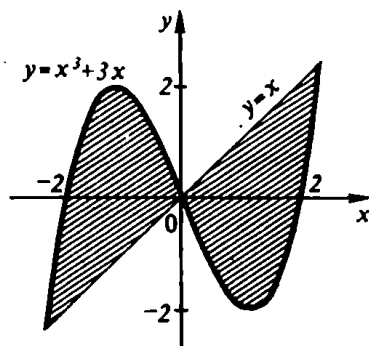


Рис. 10



$$\begin{aligned}
 &= \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx + \int_0^2 (4x - x^3) dx = \\
 &= \left( \frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) \Big|_{-2}^0 + \left( 2x^2 - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^2 = 4 + 4 = 8.
 \end{aligned}$$

Заметив, что фигура на рисунке 10 симметрична относительно начала координат, можно получить более короткое решение этой задачи:

$$\begin{aligned}
 S &= 2 \int_0^2 |(x^3 - 3x) - x| dx = 2 \int_0^2 |x^3 - 4x| dx = \\
 &= 2 \int_0^2 (4x - x^3) dx = 2 \left( 2x^2 - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^2 = 2 \cdot 4 = 8.
 \end{aligned}$$

## Вычисление интегралов

До сих пор мы применяли интегральное исчисление для решения геометрической задачи — вычисления площадей. Теперь применим геометрические соображения к вычислению интегралов.

**Пример 6.** Вычислим интеграл  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ .

Графиком функции  $y = \sqrt{1-x^2}$ , заданной на отрезке  $[0; 1]$ , является четверть окружности радиусом 1 с центром в начале координат (рис. 11), поэтому  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$  — это площадь четверти круга с радиусом 1, так что этот интеграл равен  $\pi/4$ .

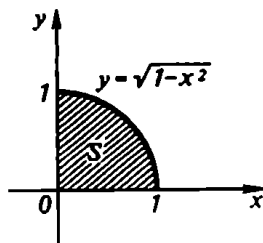


Рис. 11

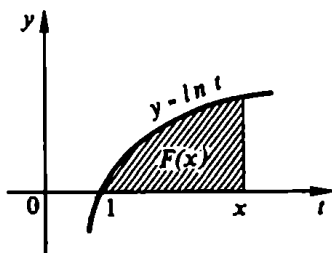


Рис. 12

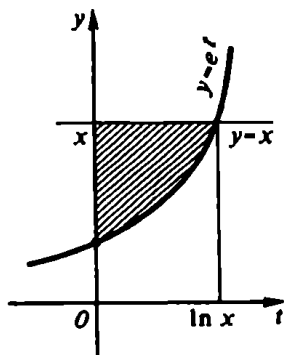


Рис. 13

**Пример 7.** Найдем первообразную для функции  $f(x) = \ln x$ . Как известно, первообразную для функции  $f$  можно задать формулой

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

В данном случае положим  $a=1$ , тогда нам надо вычислить интеграл

$$F(x) = \int_1^x \ln t dt.$$

Если  $x > 1$ , то этот интеграл равен площади фигуры, отмеченной на рисунке 12. Отразим ее относительно прямой  $y=t$ ; тогда она отобразится в фигуру (рис. 13), ограниченную прямыми  $t=0$ ,  $t=\ln x$  и графиками функций  $y=x$  и  $y=e^t$  (функция, обратная к  $y=\ln t$ ). Площадь фигуры по формуле (3) равна

$$\int_0^{\ln x} |e^t - t| dt.$$

Поскольку  $e^t \leq x$  при  $0 \leq t \leq \ln x$ , мы получаем

$$F(x) = \int_1^x \ln t dt = \int_0^{\ln x} (x - e^t) dt = (xt - e^t) \Big|_0^{\ln x} = x \ln x - x - 1.$$

Общий вид первообразной для функции  $f(x) = \ln x$  при  $x \geq 1$  таков:

$$F(x) = x(\ln x - 1) + C,$$

где  $C$  — произвольная постоянная. Продифференцировав функцию  $F$ , можно убедиться в том, что она действительно является первообразной для функции  $f$ , причем и при  $x \in (0; 1]$ .

## Цикл Карно

В школьном учебнике по физике формула для кпд цикла Карно приводится без вывода. Но, используя интегральное исчисление, вывести эту формулу не слишком трудно.

Для этого подсчитаем работу, совершаемую одним молем газа в цикле Карно. Напомним, что при изменении занимаемого им объема от  $V_1$  до  $V_2$  газ совершает работу, которая численно равна площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции  $p(V)$ , осью  $OV$  и прямыми  $V=V_1$ ,  $V=V_2$ ,

т. е. интегралу  $\int_{V_1}^{V_2} p(V) dV$ .

Цикл Карно (рис. 14) состоит из четырех участков. На участке  $ab$  происходит изотермическое расширение газа от объема  $V_1$  до объема  $V_1'$  при постоянной температуре  $T_1$ . При этом газ совершает работу

$$A_1 = \int_{V_1}^{V_1'} p(V) dV.$$

Поскольку  $pV = RT_1$ , получаем

$$A_1 = \int_{V_1}^{V_1'} \frac{RT_1}{V} dV = RT_1 \ln V \Big|_{V_1}^{V_1'} = RT_1 \ln V_1' - RT_1 \ln V_1 = RT_1 \ln \frac{V_1'}{V_1},$$

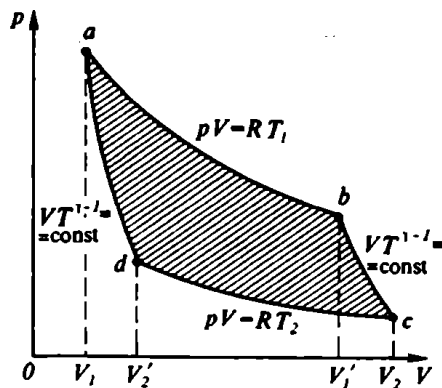


Рис. 14

причем эта работа  $A_1$  равна количеству теплоты  $Q_1$ , полученной газом от нагревателя; внутренняя энергия газа на этом участке не изменяется.

На участке  $bc$  происходит адиабатическое расширение газа до объема  $V_2$ , при этом его температура понижается от  $T_1$  до  $T_2$ . На этом участке  $VT^{\gamma-1}$  постоянно\*, газ совершает работу  $A_2$  без теплообмена с посторонними источниками тепла, т. е. за счет изменения лишь своей внутренней энергии, пропорционального разности температур, поэтому

$$A_2 = k(T_1 - T_2)$$

(коэффициент  $k$  равен  $R(\gamma - 1)$ , но мы доказывать это не будем).

На участке  $cd$  газ изотермически сжимается (внешними силами) до объема  $V_2'$ , поэтому совершаемая газом работа отрицательна и равна

$$A_3 = RT_2 \ln \frac{V_2'}{V_2},$$

причем эта работа  $A_3$  равна (по модулю) количеству теплоты  $Q_2$ , переданному газом холодильнику.

На участке  $da$  происходит адиабатическое сжатие газа, при котором его температура повышается от  $T_2$  до  $T_1$ , причем, чтобы это сжатие было возможным,  $V_2'$  должно удовлетворять равенству  $V_2'T_2^{\gamma-1} = V_1T_1^{\gamma-1}$ . На этом участке газ совершает (отрицательную) работу  $A_4$  за счет изменения лишь своей внутренней энергии, поэтому

$$A_4 = k(T_2 - T_1).$$

Цикл Карно на этом завершается, и мы получаем, что газ совершил работу

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = RT_1 \ln \frac{V_1'}{V_1} + RT_2 \ln \frac{V_2'}{V_2}.$$

Поскольку  $V_1'T_1^{\gamma-1} = V_2'T_2^{\gamma-1}$ ,  $V_2'T_2^{\gamma-1} = V_1T_1^{\gamma-1}$ , мы получаем, что  $V_1'/V_1 = V_2/V_2'$ . Обозначим это отношение через  $r$ ,  $r > 1$ . Тогда  $\ln(V_2'/V_2) = -\ln r$  и

$$A = R(T_1 - T_2) \ln r.$$

---

\* Здесь  $\gamma = C_p/C_v$  (см. И. К. Кикоин, А. К. Кикоин, «Молекулярная физика», М., «Наука», 1976).

Это — полезная работа, совершенная газом, а всего газ получил от нагревателя количество теплоты  $Q_1 = RT_1 \ln r$ , а отдал холодильнику соответственно  $Q_2 = RT_2 \ln r$ . Тем самым кпд цикла Карно равен

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

### Упражнения

Найдите площади фигур, ограниченных следующими линиями:

1.  $y = \cos^2 x - \sin^2 x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = \pi/4$ .

2.  $y = |x| + 1$ ,  $y = 0$ ,  $x = -2$ ,  $x = 1$ .

3.  $y = x^2$ ,  $y = 1$ .

4.  $x = y^2$ ,  $x = 0$ ,  $y = 2$ ,  $y = -2$ .

5.  $y = \sin x$ ,  $y = x^2 - \pi x$ .

6.  $y = |x^2 - 1|$ ,  $y = 0$ ,  $x = -2$ ,  $x = 2$ .

7.  $y = x^2$ ,  $y = \sqrt{x}$ .

# ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

К. Самаров, М. Шабунин

Напомним, что если  $X$  — область определения, а  $Y$  — область значений функции  $f$ , то для каждого  $x \in X$  существует единственное  $y \in Y$  такое, что  $f(x) = y$ .

Нередко приходится по заданному значению  $y \in Y$  искать соответствующее ему значение аргумента  $x$ , т. е. решать уравнение  $f(x) = y$  относительно  $x$ . Это уравнение может иметь не одно, а несколько и даже бесконечно много решений.

Например, в случае функции  $y = x^2$  соответствующее уравнение для каждого  $y > 0$  имеет два решения. В случае функции  $y = \sin x$  соответствующее уравнение для каждого  $y \in [-1; 1]$  имеет бесконечно много решений.

Легко также привести примеры функций, для которых уравнение  $f(x) = y$  однозначно разрешимо при каждом заданном  $y$  из области значений функции  $f$ . Например, этим свойством обладают функция  $y = 2x + 3$  и функция  $y = x^2$ , рассматриваемая на луче  $[0; +\infty)$ .

Функция  $f$  (с областью определения  $X$  и областью значений  $Y$ ) называется *обратимой*, если она принимает каждое свое значение только при одном значении аргумента. Для такой функции уравнение  $f(x) = y$  при любом  $y \in Y$  можно однозначно разрешить относительно  $x$ , т. е. каждому  $y \in Y$  соответствует единственное  $x \in X$ . Это соответствие определяет функцию  $g$ , *обратную* к функции  $f$ .

Отметим, что

а) если  $g$  — функция, обратная к функции  $f$ , то и функция  $f$  — обратная к функции  $g$ ; области определения и области значений взаимно обратных функций  $f$  и  $g$  связаны условиями

$$D(g) = E(f),$$

$$E(g) = D(f),$$

т. е. область определения функции  $g$  совпадает с областью значений функции  $f$  и наоборот;

б) для любых  $x_0 \in D(f)$ ,  $y_0 \in D(g)$  справедливо утверждение

$$f(x_0) = y_0 \Leftrightarrow g(y_0) = x_0,$$

или

$$g(f(x_0)) = x_0,$$

$$f(g(y_0)) = y_0;$$

в) графики функций  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$  симметричны относительно прямой  $y = x$ ;

г) функция, обратная к нечетной функции, тоже нечетна;

д) любая монотонная функция обратима, причем функция, обратная к возрастающей (убывающей), — возрастающая (убывающая).

Функция  $\sin x$ , как и любая периодическая функция, не обратима. В то же время, если ограничить ее область определения любым промежутком монотонности, полученная функция будет обратимой. В частности, функция  $\sin x$  монотонна и обратима на отрезке  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ .

Функция, обратная к функции  $\sin x$  на отрезке  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ , называется *арксинусом*; значение этой функции в точке  $a$  обозначается  $\arcsin a$  (рис. 1). Из определения арксинуса следует, что арксинус числа  $a$  есть число, заключенное между  $-\frac{\pi}{2}$  и  $\frac{\pi}{2}$ , синус которого равен  $a$ .

Подчеркнем, что функция  $\arcsin x$  не является обратной к  $\sin x$  — функция  $\sin x$ , не будучи обратной, не имеет обратной. Функция  $\arcsin x$  является обратной к «функции  $\sin x$ ,

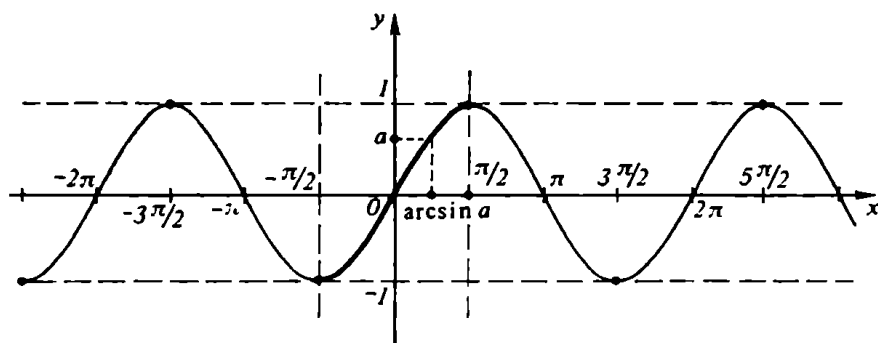


Рис. 1

рассмотренной на отрезке  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ , или, как еще говорят в математике, к *сужению функции*  $\sin x$  на отрезок  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ .

В силу свойств взаимно обратных функций, перечисленных в начале статьи,

$$D(\arcsin) = [-1; 1],$$

$$E(\arcsin) = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}].$$

и для любых  $x_0 \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ ,  $y_0 \in [-1; 1]$  справедливо утверждение

$$\sin x_0 = y_0 \Leftrightarrow \arcsin y_0 = x_0,$$

или

$$\arcsin(\sin x_0) = x_0, \quad (1)$$

$$\sin(\arcsin y_0) = y_0. \quad (2)$$

Подчеркнем еще раз, что равенство (2) справедливо «всегда», т.е. для любого  $y_0 \in [-1; 1]$ , а равенство (1) выполняется не для всех  $x_0 \in \mathbb{R}$ , а только при  $x_0 \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ .

Иначе говоря, справедливо утверждение

$$\arcsin a = b \Rightarrow \sin b = a,$$

утверждение же

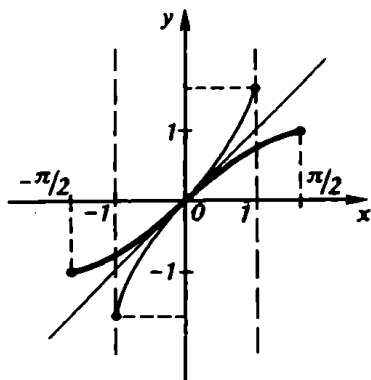


Рис. 2



$$\sin a = b \Rightarrow \arcsin b = a$$

справедливо лишь при  $a \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ .

График арксинуса получается по общему правилу — симметрией соответствующей части графика синуса относительно прямой  $y=x$  (рис. 2).

Поскольку синус — нечетная функция, нечетен и арксинус:

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x. \quad (3)$$

Тождество (3), как и любое равенство, в которое входит арксинус, имеет место только тогда, когда аргумент арксинуса лежит на  $[-1; 1]$ .

Поскольку синус возрастает на  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ , арксинус возрастает на  $[-1; 1]$ . Арксинус — обратимая функция, обратной к ней является «синус, рассмотренный на  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ ».

Перейдем к арккосинусу. Функция  $\cos x$  не обратима, но, если ограничить ее область определения любым промежутком монотонности, полученная функция будет обратимой.

Функция, обратная к функции  $\cos x$ , рассмотренной на отрезке  $[0; \pi]$ , называется *арккосинусом*; значение этой функции в точке  $a$  обозначается  $\arccos a$  (рис. 3). Арккосинус числа  $a$  есть число, заключенное между 0 и  $\pi$ , косинус которого равен  $a$ .

Из свойств взаимно обратных функций следует, что

$$D(\arccos) = [-1; 1],$$

$$E(\arccos) = [0; \pi]$$

и для любых  $x_0 \in [0; \pi]$ ,  $y_0 \in [-1; 1]$  справедливо утверждение

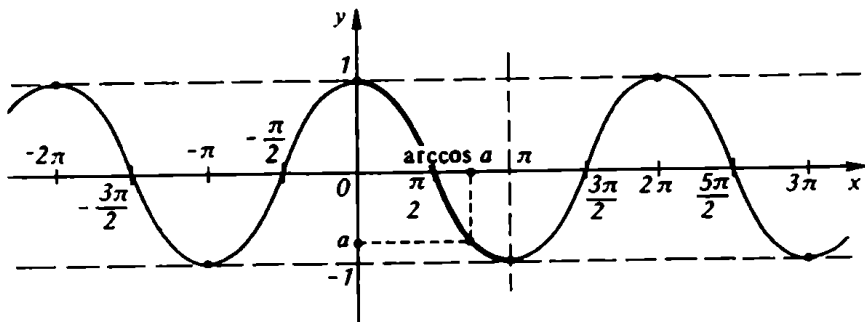


Рис. 3

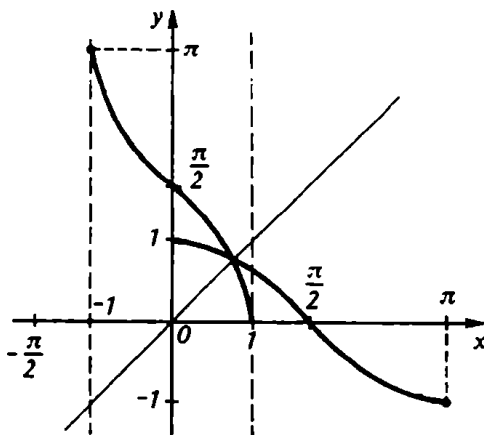


Рис. 4

$$\cos x_0 = y_0 \Leftrightarrow \arccos y_0 = x_0,$$

или

$$\arccos(\cos x_0) = x_0,$$

$$\cos(\arccos y_0) = y_0.$$

Другими словами,

$$\arccos a = b \Rightarrow \cos b = a,$$

$$\cos a = b \text{ и } 0 \leq a \leq \pi \Rightarrow \arccos b = a.$$

График арккосинуса получается симметрией соответствующей части графика косинуса относительно прямой  $y = x$  (рис. 4).

Аналогом равенства (3) является тождество

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x, \quad (4)$$

справедливое только при  $-1 \leq x \leq 1$ ; мы его докажем ниже.

Арккосинус убывает на  $[-1; 1]$ . Обратной к функции  $\arccos x$  является «косинус, рассмотренный на  $[0; \pi]$ ».

Арксинус и арккосинус связаны тождеством

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad (5)$$

которое мы докажем ниже. Впрочем, при  $0 < x < 1$   $\arcsin x$  и  $\arccos x$  — углы прямоугольного треугольника; равенство (5) в этом случае очевидно.

Наконец — об арктангенсе.

Функция, обратная к функции  $\operatorname{tg} x$ , рассмотренной на интервале  $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ , называется *арктангенсом*; значение этой

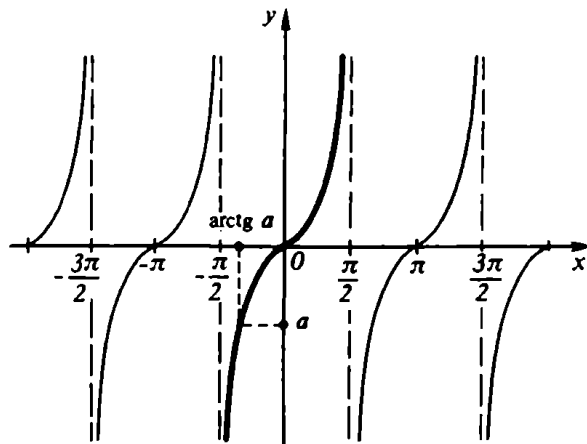


Рис. 5

функции в точке  $a$  обозначается  $\operatorname{arctg} a$  (рис. 5). Арктангенс числа  $a$  есть число, заключенное между  $-\frac{\pi}{2}$  и  $\frac{\pi}{2}$ , тангенс которого равен  $a$ .

Из свойств взаимно обратных функций следует, что

$$D(\operatorname{arctg}) = \mathbf{R},$$

$$E(\operatorname{arctg}) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

и для любых  $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $y_0 \in \mathbf{R}$  справедливо утверждение

$$\operatorname{tg} x_0 = y_0 \Leftrightarrow \operatorname{arctg} y_0 = x_0,$$

или

$$\operatorname{arctg} (\operatorname{tg} x_0) = x_0, \operatorname{tg} (\operatorname{arctg} y_0) = y_0.$$

Иначе говоря,

$$\operatorname{arctg} a = b \Rightarrow \operatorname{tg} b = a,$$

$$\operatorname{tg} a = b \text{ и } -\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{arctg} b = a.$$

Арктангенс — нечетная функция ( $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$ ), возрастающая на всей числовой прямой. График арктангенса изображен на рисунке 6.

Тождества с «аркусами» доказываются обычно следующим приемом: во-первых, вычисляется значение какой-нибудь тригонометрической функции  $\varphi$  ( $\varphi$  — это синус, косинус или тан-

генс) от обеих частей доказываемого тождества

$$A=B$$

и проверяется, что  $\varphi(A)=\varphi(B)$ , и, во-вторых, устанавливается, что  $A$  и  $B$  расположены на таком промежутке, где выбранная функция  $\varphi$  монотонна; тогда из равенства  $\varphi(A)=\varphi(B)$  вытекает, что  $A=B$ .

**Пример 1.** Докажем, что для всех  $x \in [-1; 1]$  верно (4). Посчитаем косинус от обеих частей равенства (4):

$$\cos(\arccos(-x)) = -x;$$

$$\cos(\pi - \arccos x) = -\cos(\arccos x) = -x.$$

Итак,  $\cos(\arccos(-x)) = \cos(\pi - \arccos x)$ . По определению арккосинуса

$$0 \leq \arccos(-x) \leq \pi.$$

Из неравенства  $0 \leq \arccos x \leq \pi$  вытекает, что

$$0 \leq \pi - \arccos x \leq \pi.$$

На  $[0; \pi]$  косинус монотонен. Следовательно,

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x.$$

Если бы мы в качестве вычисляемой функции выбрали синус, то, конечно, тоже получили бы совпадение значений:

$$\begin{aligned} \sin(\arccos(-x)) &= \sqrt{1 - \cos^2(\arccos(-x))} = \\ &= \sqrt{1 - (-x)^2} = \sqrt{1 - x^2}, \end{aligned}$$

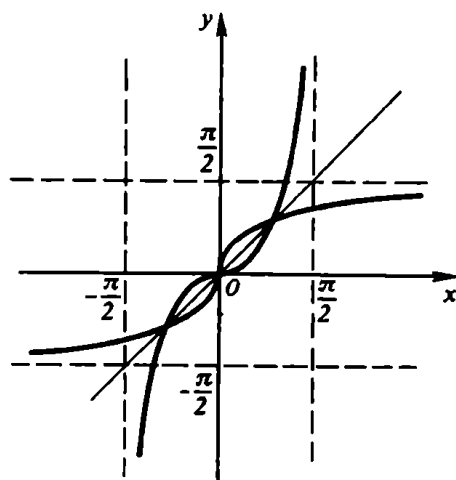


Рис. 6

$$\sin(\pi - \arccos x) = \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2}$$

(в обоих случаях перед корнем пишется «плюс», так как  $0 \leq \arccos(-x) \leq \pi$  и  $0 \leq \arccos x \leq \pi$ , а на  $[0; \pi]$  синус неотрицателен), но из равенства

$$\sin(\arccos(-x)) = \sin(\pi - \arccos x)$$

не следует (4), так как на  $[0; \pi]$  синус не монотонен.

**Пример 2.** Докажем, что для всех  $x \in [-1; 1]$  верно тождество (5). Докажем мы его в равносильном виде

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x.$$

По определению арккосинуса

$$0 \leq \arccos x \leq \pi,$$

откуда вытекает, что

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - \arccos x < \frac{\pi}{2}.$$

Значит, левая и правая части доказываемого равенства при всех допустимых значениях  $x$  принадлежат  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ . Вычислив синус от обеих его частей, получим

$$\sin(\arcsin x) = x,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \cos(\arccos x) = x.$$

На  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  синус монотонен. Следовательно,

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x.$$

**Пример 3.** Докажем, что для  $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$

$$\arcsin(\sin x) = \pi - x.$$

С одной стороны,

$$\sin(\arcsin(\sin x)) = \sin x,$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x.$$

С другой стороны,

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(\sin x) \leq \frac{\pi}{2}.$$

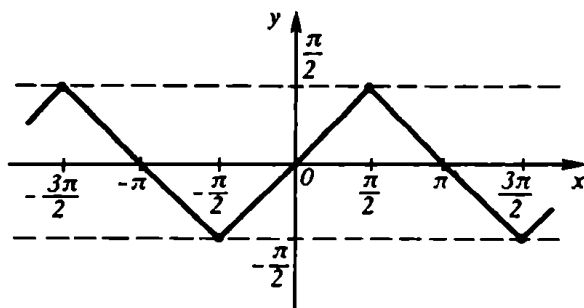


Рис. 7

Из неравенства  $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$  следует, что

$$-\frac{\pi}{2} \leq \pi - x \leq \frac{\pi}{2}.$$

На  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  синус монотонен. Значит,  $\arcsin(\sin x) = \pi - x$ . Итак,

$$\arcsin(\sin x) = \begin{cases} x, & \text{если } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x, & \text{если } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

Поскольку  $\arcsin(\sin x)$  — периодическая функция с периодом  $2\pi$  (почему?) и отрезок  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$  имеет длину  $2\pi$ , мы можем построить ее график (рис. 7).

Задачи на вычисления с «аркусами» решаются аналогично.

**Пример 4.** Вычислим  $A = \arcsin \frac{4}{\sqrt{65}} - \arccos\left(-\frac{11}{\sqrt{130}}\right)$ . Прежде всего,

$$\begin{aligned} A &= \arcsin \frac{4}{\sqrt{65}} - \left(\pi - \arccos \frac{11}{\sqrt{130}}\right) = \\ &= \arcsin \frac{4}{\sqrt{65}} + \arccos \frac{11}{\sqrt{130}} - \pi. \end{aligned}$$

Оценим теперь число  $B = \arcsin \frac{4}{\sqrt{65}} + \arccos \frac{11}{\sqrt{130}}$ . Поскольку

$$\frac{4}{\sqrt{65}} > 0 \text{ и } \frac{11}{\sqrt{130}} > 0,$$

$$0 < \arcsin \frac{4}{\sqrt{65}} < \frac{\pi}{2},$$

$$0 < \arccos \frac{11}{\sqrt{130}} < \frac{\pi}{2},$$

$$0 < B < \pi.$$

Так как на  $[0; \pi]$  синус не монотонен, а косинус монотонен, найдем  $\cos B$ :

$$\begin{aligned} \cos B &= \cos \left( \arcsin \frac{4}{\sqrt{65}} + \arccos \frac{11}{\sqrt{130}} \right) = \\ &= \cos \left( \arcsin \frac{4}{\sqrt{65}} \right) \cdot \cos \left( \arccos \frac{11}{\sqrt{130}} \right) - \\ &\quad - \sin \left( \arcsin \frac{4}{\sqrt{65}} \right) \cdot \sin \left( \arccos \frac{11}{\sqrt{130}} \right) = \\ &= \sqrt{1 - \left( \frac{4}{\sqrt{65}} \right)^2} \cdot \frac{11}{\sqrt{130}} - \frac{4}{\sqrt{65}} \sqrt{1 - \left( \frac{11}{\sqrt{130}} \right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Из соотношений  $\cos B = \frac{\sqrt{2}}{2}$  и  $0 < B < \pi$  следует, что  $B = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ . Значит,  $A = B - \pi = -\frac{3\pi}{4}$ .

**Пример 5.** Сравним числа  $\arcsin \frac{2}{5}$  и  $\arccos \frac{2}{5}$ . Поскольку  $\frac{2}{5} > 0$ ,

$$0 < \arcsin \frac{2}{5} < \frac{\pi}{2} \text{ и } 0 < \arccos \frac{2}{5} < \frac{\pi}{2}.$$

На отрезке  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  и синус, и косинус, и тангенс монотонны. Вычислим, например, косинус от сравниваемых чисел:

$$\cos \left( \arcsin \frac{2}{5} \right) = \sqrt{1 - \left( \frac{2}{5} \right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{5},$$

$$\cos \left( \arccos \frac{2}{5} \right) = \frac{2}{5}.$$

Так как на  $[0; \frac{\pi}{2}]$  косинус убывает, из неравенства

$$\cos \left( \arcsin \frac{2}{5} \right) > \cos \left( \arccos \frac{2}{5} \right)$$

следует, что

$$\arcsin \frac{2}{5} < \arccos \frac{2}{5}.$$

**Пример 6.** Вычислим  $\arcsin(\sin 11)$ . Для этого сравним сначала  $11$  с  $\frac{\pi k}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). Из неравенства  $3 < \pi < 3,142$  ( $\pi = 3,14159\dots$ ) следует, что  $\frac{7\pi}{2} < 11 < 4\pi$ . Значит,  $-\frac{\pi}{2} < 11 - 4\pi < 0 < \frac{\pi}{2}$ . Поэтому

$$\arcsin(\sin 11) = \arcsin(\sin(11 - 4\pi)) = 11 - 4\pi.$$

### Упражнения

1. Докажите тождество

$$\text{a) } \arccos x = \begin{cases} \arcsin \sqrt{1-x^2}, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ \pi - \arcsin \sqrt{1-x^2}, & \text{если } -1 \leq x \leq 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } 2 \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x} + \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2} = \pi \quad (0 \leq x < 1).$$

2. Вычислите

$$\text{a) } \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8};$$

$$\text{б) } \arccos(\cos 4);$$

$$\text{в) } \arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right).$$

3. Постройте график функции

$$\text{a) } \arccos(\cos x);$$

$$\text{б) } \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x).$$



# ЧТО ТАКОЕ СТЕПЕНЬ?

*Р. Гордин*

Оперируя со степенями, мы обнаруживаем замечательный факт: умножению, делению и возведению в степень степеней одного и того же числа с целыми показателями соответствуют сложение, вычитание и умножение показателей. Это соответственно сохраняется и при переходе к рациональным показателям.

Возникает вопрос: можно ли так определить степень с действительным показателем, чтобы замеченное нами соответствие сохранилось?

Здесь мы проследим, листая школьные учебники, за всеми последовательными этапами обобщения понятия степени: от степеней с натуральными показателями до степеней с произвольными действительными показателями.

## Степень с натуральным показателем

**Определение 1.**  $a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$  ( $n$  раз),  $a^1 = a$  (здесь  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ ). Из этого определения легко вывести следующие свойства степени:

1.  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ .

2.  $\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{при } m > n, \\ \frac{1}{a^{n-m}} & \text{при } n > m. \end{cases}$

3.  $(a^m)^n = a^{mn}$ .

4. Если  $a > 0$ , то  $a^n > 0$ .

5. Если  $a > 1$  и  $m > n$ , то  $a^m > a^n$ .

6. Если  $0 < a < 1$  и  $m > n$ , то  $a^m < a^n$ .

Обратите внимание на свойство 1. Его иногда называют *основным свойством показателя степени* или *основным свойством показательной функции*.

При дальнейших последовательных обобщениях понятия степени мы будем в первую очередь стремиться к сохранению именно этого свойства (остальные свойства 2—6 также будут сохраняться, и на каждом шагу их можно будет вывести из свойства 1).

## Степень с целым показателем

Примем следующие определения:

**Определение 2.**  $a^0 = 1$ .

Целесообразность этого определения вытекает из простого рассуждения: пусть  $a^0 = k$ ; тогда (мы стремимся к сохранению свойства 1)  $a^m \cdot k = a^m \cdot a^0 = a^{m+0} = a^m$ ; следовательно, должно быть  $k = 1$ .

Это рассуждение не является доказательством соотношения  $a^0 = 1$ . Оно лишь подводит нас к «хорошему» определению нулевой степени.

**Определение 3.** Пусть  $a \neq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ .

Это определение также диктуется необходимостью сохранения свойства 1 (убедитесь в этом).

Докажем теперь, что  $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$  для любых  $m \in \mathbb{Z}$  и  $n \in \mathbb{Z}$ .

Мы ограничимся случаем  $m < 0$  и  $n < 0$ .

Имеем

$$a^m \cdot a^n = \frac{1}{a^{-m}} \cdot \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m-n}} = \frac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}.$$

### Упражнения

1. Докажите свойство 1 для оставшихся случаев, а также свойства 2—6.

2. Почему следующие определения — «плохие»: а)  $a^{-n} = \frac{2}{a^n}$ ; б)  $a^{-n} = -a^n$ ; в)  $a^0 = 2$ ?

## Степень с рациональным показателем

Напомним, прежде всего, что число  $r$  называется *рациональным*, если  $r = \frac{m}{n}$ , где  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . При этом представление рационального числа в виде дроби не единственно.

Так,

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \dots$$

Будем искать определение степени  $a^r$ , где  $a > 0$ ,  $r = \frac{m}{n}$ , исходя из необходимости сохранения свойства 1. Это значит, что для любых  $r_1$  и  $r_2$  должно выполняться соотношение  $a^{r_1+r_2} = a^{r_1} \cdot a^{r_2}$ .

Предположим, что мы уже знаем, что такое  $a^{\frac{m}{n}}$ . Пусть  $a^{\frac{m}{n}} = k$ . Тогда должно быть

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = k^n = a^{\frac{m}{n} + \frac{m}{n} + \dots + \frac{m}{n}} = a^m.$$

Окончательно получаем  $k = \sqrt[n]{a^m}$ .

Это соотношение подсказывает следующее определение:

**Определение 4.** Если  $a > 0$ , то  $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ . Заметим, что для отрицательных  $a$  понятие степени с рациональным не целым показателем не определяется. Также заметим, что основные свойства корня  $n$ -й степени позволяют доказать, что принятое нами определение  $a^r$  корректно. Под корректностью определения в данном случае понимается независимость числа  $a^r$  от записи числа  $r$  в виде дроби, т.е. в конечном счете справедливость равенства

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[kn]{a^{km}}, \text{ где } k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}.$$

**Упражнение 3.** Повторите свойства корня  $n$ -й степени и выведите из них свойства 1–6 степени с рациональным показателем.

## Степень с действительным показателем

Наша задача — найти «хорошее» определение степени с действительным показателем. В самом определении показательной функции перечисляются те ее свойства, которые могут быть выведены из этого «хорошего» определения. Каково же «хорошее» определение степени с любым действительным показателем?

Пусть для определенности  $a > 1$ . Если  $x$  — рациональное число, то  $a^x$  нами уже определено, причем функция  $y = a^x$  в силу свойства 5 возрастает на множестве  $\mathbb{Q}$  всех рациональных чисел (при  $0 < a < 1$  функция  $y = a^x$  убывает (свойство 6) на множестве  $\mathbb{Q}$ ).

Для того чтобы продолжить функцию  $y=a^x$  на множество  $\mathbb{R}$  всех действительных чисел, мы сначала потребуем лишь *сохранения монотонности* этой функции.

Пусть  $\alpha$  — иррациональное число, а  $r_1$  и  $r_2$  — рациональные числа, для которых  $r_1 < \alpha < r_2$ . Предположим, что нам уже известно, что такое  $a^\alpha$ . В силу нашего требования, должны быть справедливы неравенства

$$a^{r_1} < a^\alpha < a^{r_2}.$$

Таким образом, число  $a^\alpha$  должно быть заключено между любыми двумя числами  $a^{r_1}$  и  $a^{r_2}$ , где  $r_1 < \alpha < r_2$ .

В курсах математического анализа доказывается, что существует единственное число  $\beta$ , для которого справедливы все неравенства  $a^{r_1} < \beta < a^{r_2}$ , где  $r_1$  и  $r_2$  — произвольные рациональные числа, для которых  $r_1 < \alpha < r_2$ .

Это дает возможность сформулировать следующее определение:

**Определение 5.** Пусть  $\alpha$  иррационально и  $a > 0$ . Тогда  $a^\alpha$  — это действительное число, заключенное между любыми двумя числами  $a^{r_1}$  и  $a^{r_2}$ , где  $r_1$  и  $r_2$  рациональны и  $r_1 < \alpha < r_2$ .

Рамки школьного курса не позволяют доказать существование числа  $a^\alpha$ , и мы примем его на веру. Ограничимся доказательством единственности.

Для доказательства нам понадобится важное и само по себе *неравенство Бернулли*  $(1+h)^n \geq 1+nh$ , где  $n \in \mathbb{N}$  и  $h \geq -1$ .

Докажем его методом математической индукции.

При  $n=1$  это неравенство верно ( $1+h \geq 1+h$ ). Предположим, что  $(1+h)^k \geq 1+kh$ , и докажем, что  $(1+h)^{k+1} \geq 1+(k+1)h$ . Имеем

$$\begin{aligned} (1+h)^{k+1} &= (1+h)(1+h)^k \geq (1+h)(1+kh) = \\ &= 1+kh+h+h^2k = 1+(k+1)h+h^2k \geq 1+(k+1)h, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Докажем теперь, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$  при  $a > 0$ .

Пусть дано  $\varepsilon > 0$  и  $a > 1$  (случай  $0 < a < 1$  разберите самостоятельно), тогда  $\sqrt[n]{a} = 1 + \varepsilon_n$ , где  $\varepsilon_n > 0$ . Отсюда, применяя неравенство Бернулли, получаем  $a = (1 + \varepsilon_n)^n \geq 1 + n\varepsilon_n$ . Поэтому  $0 < \varepsilon_n \leq \frac{a-1}{n}$ . Легко видеть, что  $\frac{a-1}{n} < \varepsilon$  при  $n > N = \left\lceil \frac{a-1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ . (Здесь и далее  $[x]$  — целая часть числа  $x$ ).

Мы доказали, таким образом, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = 0$ , но это и значит, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + e_n) = 1.$$

Теперь перейдем к доказательству единственности.

Пусть существуют 2 числа  $\beta$  и  $\gamma$ , для которых справедливы неравенства  $a^{r_1} < \beta < a^{r_2}$  и  $a^{r_1} < \gamma < a^{r_2}$  при любых рациональных  $r_1$  и  $r_2$ , для которых  $r_1 < \alpha < r_2$ . Пусть для определенности  $\beta > \gamma$ .

Тогда  $0 < \beta - \gamma < a^{r_2} - a^{r_1} = a^{r_1} (a^{r_2 - r_1} - 1)$ . Ясно, что  $a^{r_1} < a^{|a|+1} = c$ . Существуют для любого  $n \in \mathbb{N}$  такие  $r_1^{(n)}$  и  $r_2^{(n)}$ , что  $r_1^{(n)} < \alpha < r_2^{(n)}$  и  $r_2^{(n)} - r_1^{(n)} < \frac{1}{n}$ . Для этих  $r_1^{(n)}$  и  $r_2^{(n)}$  (по свойству 5 для рационального показателя)

$$0 < \beta - \gamma < c(a^{\frac{1}{n}} - 1).$$

По доказанному ранее, для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $N$ , что при всех  $n > N$  справедливо неравенство  $a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{\varepsilon}{c}$ . Поэтому при любом  $\varepsilon > 0$  справедливо неравенство  $0 < \beta - \gamma < \varepsilon$ , что невозможно.

Исходя из определения 5, можно доказать, что для степени с действительным показателем сохраняются все свойства 1—6, установленные нами для натуральных показателей. Этим и завершается построение функции  $y = a^x$ .

Следует заметить, что при определении степени с иррациональным показателем мы отошли от принятой ранее схемы: строить определения, лишь исходя из необходимости сохранения свойства 1.

Оказывается, продолжить показательную функцию  $y = a^x$ , определенную на множестве  $\mathbb{Q}$  рациональных чисел, с сохранением лишь свойства 1 можно бесконечным количеством способов. Точнее, существует бесконечно много функций  $y/f(x)$  таких, что  $f(x) = a^x$  при  $x \in \mathbb{Q}$ , для которых  $f(x+y) = f(x)f(y)$ .

Из всех этих функций монотонной (и непрерывной) будет лишь одна построенная нами функция  $y = a^x$ . Все остальные функции этого семейства устроены достаточно «дико». Например, любая из них не ограничена ни на каком промежутке числовой оси.

## Как вычислить $2^{\sqrt{2}}$ ?

Рассмотрим несколько десятичных приближений  $\sqrt{2}$  по недостатку и по избытку. Эти приближения удовлетворяют неравенствам  $1 < \sqrt{2} < 2$ ;  $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ ;  $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ . Тогда, по нашему определению 5, число  $2^{\sqrt{2}}$  должно удовлетворять неравенствам  $2^1 < 2^{\sqrt{2}} < 2^2$ ;  $2^{1,4} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,5}$ ;  $2^{1,41} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,42}$ , или  $2 < 2^{\sqrt{2}} < 4$ ;  $2,6 < 2^{\sqrt{2}} < 2,9$ ;  $2,65 < 2^{\sqrt{2}} < 2,68$ .

Второе из этих неравенств позволяет найти  $2^{\sqrt{2}}$  с точностью до целых, третье — с точностью до десятых. Понятно, что можно получить значение  $2^{\sqrt{2}}$  с любой заданной точностью, взяв соответствующие приближения  $\sqrt{2}$ .

### Упражнения

4. Что больше:  $2^{\sqrt{3}}$  или  $3^{\sqrt{2}}$ ?
5. Докажите свойства 4 и 5 для степени с любым действительным показателем.
6. Докажите свойство 1 для степени с любым действительным показателем.
7. Докажите непрерывность функции  $y = a^x$  а) при  $x=0$ ; б) при  $x=x_0$ , где  $x_0 \in \mathbb{R}$ .
8. Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  — иррациональные числа. Может ли число  $\alpha^\beta$  быть рациональным?

# ПЛОЩАДЬ ПОД ГИПЕРБОЛОЙ, ЛОГАРИФМ И ЭКСПОНЕНТА

А. Егоров

## 1. Введение. Определение логарифма

Показательная функция  $x \rightarrow a^x$  изучается в школе после нескольких обобщений операции возвышения в степень: сначала определяются степени с натуральным показателем, затем с рациональным и, наконец, с иррациональным показателем. Логарифм определяется затем как функция, обратная показательной.

Мы поступим иначе: начнем сразу с определения логарифма, а потом перейдем к обратной функции — «экспоненте». Определение, которое мы сейчас дадим, позволит наглядно изучить основные свойства этих функций и получить оценки, особенно важные для физических приложений, а также продемонстрировать один из часто встречающихся в математике способов построения новых функций по уже известным.

Такой известной функцией послужит нам функция  $x \rightarrow \frac{1}{x}$ , график которой  $y = \frac{1}{x}$  — знакомая вам гипербола.

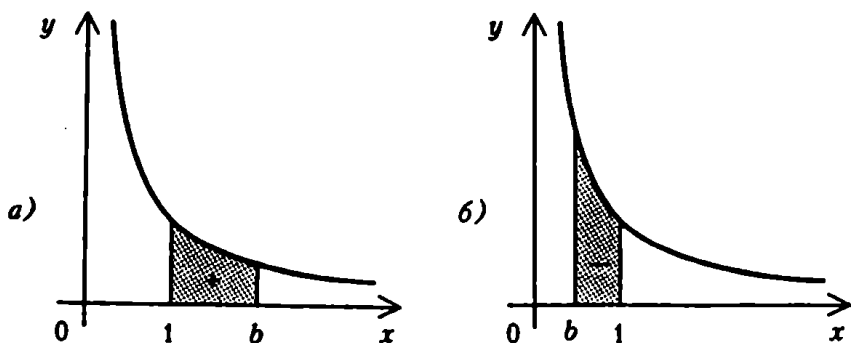


Рис. 1

**Определение.** Пусть  $b$  — положительное число. Обозначим через  $\ln b$  число, модуль которого равен площади фигуры, ограниченной графиком функции  $y = \frac{1}{x}$ , осью абсцисс  $y=0$  и прямыми  $x=1$  и  $x=b$ , а знак — плюс, если  $b > 1$  (рис. 1, а), и минус, если  $b < 1$  (рис. 1, б); если  $b = 1$ , то  $\ln b = 0$ . Функция  $b \rightarrow \ln b$  называется *натуральным логарифмом*.

Для тех, кто знаком с понятием интеграла, наше определение логарифма можно сформулировать так:

$$\ln b^{\text{def}} = \int_1^b \frac{1}{x} dx, \text{ если } b > 0.$$

Читателю, который хотел бы детально и строго проследить за всеми рассуждениями и решить задачи (а в них заключена значительная часть содержания статьи), потребуется знание основных свойств действительных чисел. Однако статья написана по возможности так, чтобы основные факты, касающиеся свойств логарифма и экспоненты, можно было понять, пользуясь лишь наивными представлениями о действительных числах, непрерывности, пределе и т. п., не вникая в тонкости, связанные со строгими определениями этих понятий.

## 2. Площадь

Одно из понятий, которое следовало бы строго определить, — это понятие площади. Действительно, нужно объяснить, что мы понимаем под площадью «криволинейной трапеции» (см. рис. 1). Ведь в школе речь идет только о площадях многоугольника, круга и его частей, а наша трапеция с одного бока ограничена гиперболой.

Здесь мы ограничимся замечанием, что площадь — это функция, которую можно определить на достаточно широком классе фигур (в этот класс включаются и многоугольники, и все выпуклые ограниченные фигуры, и наша «трапеция» так, чтобы выполнялись условия:

- 1) площадь любой фигуры — число неотрицательное;
- 2) площади равных фигур равны;
- 3) если фигуру разрезать на две части, для каждой из которых площадь определена, то сумма этих площадей равна площади всей фигуры;
- 4) площадь прямоугольника со сторонами  $a$  и  $b$  равна  $ab$ .



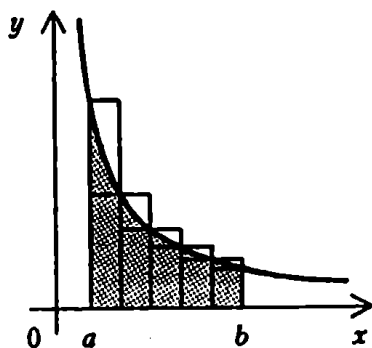


Рис. 2

Описывать класс фигур, для которых можно определить такую функцию  $S$ , мы не будем, но докажем, что условиями 1 — 4 площадь  $S$  «криволинейной трапеции»  $a < x < b$ ;  $0 < y < \frac{1}{x}$  (рис. 2) определяется однозначно.

Для этого разделим отрезок  $[a, b]$  на  $n$  равных частей и построим две «лестницы» — ступенчатые фигуры, состоящие из прямоугольников с основаниями  $\frac{b-a}{n}$  на оси  $Ox$ , из которых одна содержит нашу криволинейную трапецию, а другая содержится в ней (рис. 2). Пусть  $S'_n$  и  $S''_n$  — площади этих «лестниц»\*. Ясно, что  $S'_n < S < S''_n$ . С другой стороны, ясно, что

$$S'_n - S''_n = \frac{b-a}{n} (a^{-1} - b^{-1}),$$

т. е. при достаточно большом  $n$  разность между  $S'_n$  и  $S''_n$  может быть сделана сколь угодно малой. Поэтому существует только одно число  $S$ , заключенное между  $S'_n$  и  $S''_n$  при всех  $n$  (отсюда следует также, что обе последовательности  $S'_n$  и  $S''_n$  с ростом  $n$  приближаются к  $S$ , т. е. что  $S$  является их общим пределом).

Итак, определение площади «трапеции» под гиперболой, а с ним и определение функции  $y = \ln x$  уточнено.

### 3. Основное свойство натурального логарифма

Это свойство выражается формулой

$$\ln x_1 x_2 = \ln x_1 + \ln x_2 \quad (1)$$

(при  $x_1 > 0$ ,  $x_2 > 0$ )

---

\* Эти площади мы умеем определять с помощью условий 3 и 4.

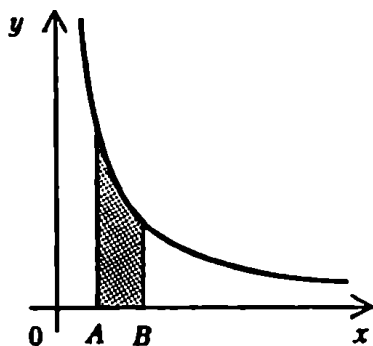


Рис. 3

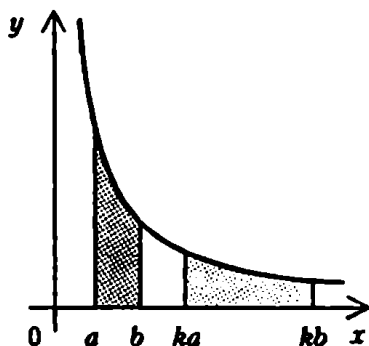


Рис. 4

и означает, что натуральный логарифм произведения равен сумме натуральных логарифмов сомножителей.

Прежде чем доказывать формулу (1), установим одно важное свойство криволинейных трапеций для функции  $y = \frac{1}{x}$ . Обозначим через  $S [A, B]$  площадь криволинейной трапеции с вершинами  $A, B$  (рис. 3). Тогда, если  $b > a > 0$  и  $k$  — произвольное положительное число, то (рис. 4)

$$S [a; b] = S [ka; kb]. \quad (2)$$

Для доказательства рассмотрим преобразование плоскости, состоящее в растяжении в  $k$  раз от оси  $Oy$  и в сжатии в  $k$  раз к оси  $Ox$ , т. е. преобразование, переводящее точку  $(x; y)$  в точку  $(kx; \frac{y}{k})$  (рис. 5). Легко видеть, что это преобразование переводит трапецию над отрезком  $[a; b]$  в трапецию над отрезком  $[ka; kb]$  (рис. 4). В самом деле, если точка  $(x; y)$  принадлежит первой из них, то  $a < x < b$  и  $0 < xy < 1$ , но тогда  $ka < kx < kb$

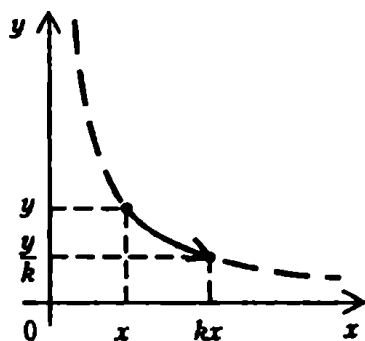


Рис. 5

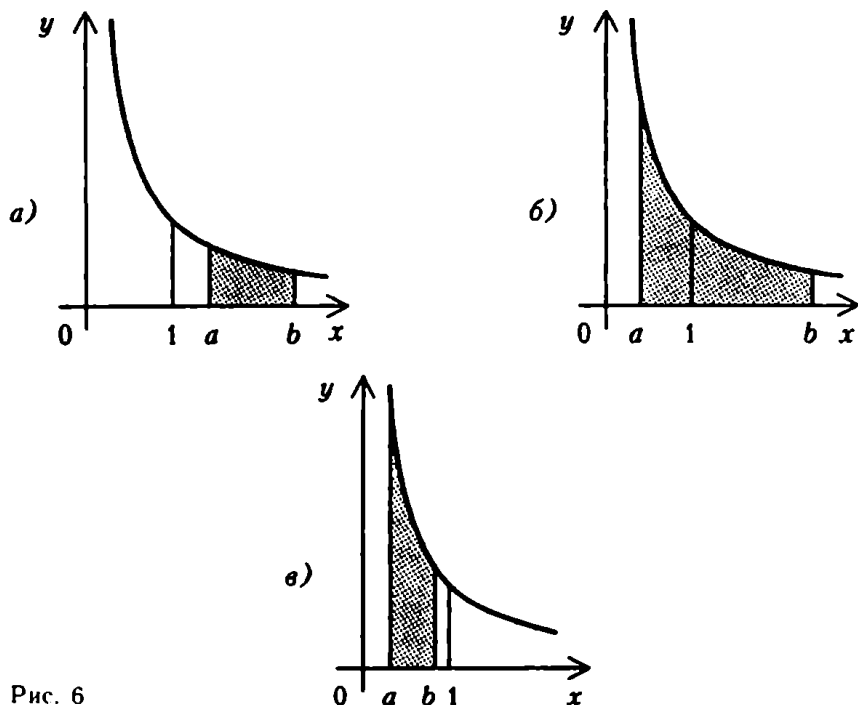


Рис. 6

и  $0 < (kx) \cdot \frac{y}{k} \leq 1$ , т. е. точка  $(kx; \frac{y}{k})$  принадлежит второй трапеции. Наоборот, если  $(kx; \frac{y}{k})$  — некоторая точка второй трапеции, то  $(x; y)$  — точка первой.

Заметим теперь, что при нашем преобразовании площадь любой фигуры не меняется. Действительно, так как не меняются площади прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат (основания таких прямоугольников умножаются на  $k$ , а высоты — на  $\frac{1}{k}$ ), то не меняются и площади ступенчатых фигур, вписанных в криволинейные трапеции, и, следовательно, площади самих криволинейных трапеций.

Итак,  $S[a; b] = S[ka; kb]$ .\*

Далее, вы без труда докажете, что  $S[a, b] = \ln b - \ln a$  (рис. 6). Но тогда

$$\ln a - \ln b = \ln ka - \ln kb. \quad (2')$$

---


$$* \int_a^b \frac{1}{x} dx = \int_{ka}^{kb} \frac{1}{x} dx.$$

Хотя пока эта формула доказана лишь при  $b > a$ , она справедлива для любых положительных  $a$  и  $b$ : ведь при  $a > b$  верно равенство

$$\ln a - \ln b = \ln ka - \ln kb,$$

равносильное (2').

Основное свойство логарифмов сразу получается из (2'). Достаточно положить  $b = x_2$ ,  $a = 1$ ,  $k = x_1$ . В частности, при  $x_2 = x_1^{-1} = x$  получаем

$$\ln x = -\ln \frac{1}{x}. \quad (3)$$

Из основного свойства (1) легко выводятся следующие формулы:

$$\ln x_1 x_2 \dots x_n = \ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n, \quad (4)$$

$$\ln \frac{x_1}{x_2} = \ln x_1 - \ln x_2. \quad (5)$$

Они понадобятся нам в дальнейшем.

#### 4. График функции $x \rightarrow \ln x$

Формула (1) позволяет уточнить поведение функции  $y = \ln x$ . Прежде всего убедимся в том, что  $\ln x$  неограниченно возрастает при возрастании  $x$ . Действительно, так как  $\ln 2 > 0$  и в силу (4)  $\ln 2^n = \ln (2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2) = \ln 2 + \ln 2 + \ln 2 + \dots + \ln 2 = n \ln 2$ , то  $\ln 2^n$  при увеличении  $n$  возрастает неограниченно, а это означает неограниченное возрастание функции  $y = \ln x$

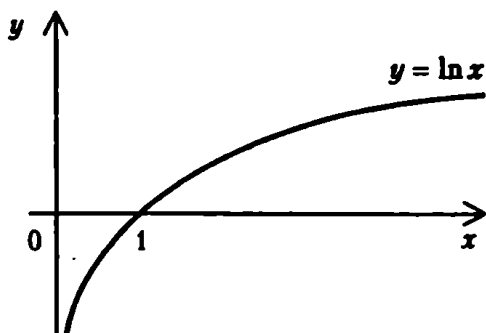


Рис. 7

(в самом деле,  $\ln x > n \ln 2$  при  $x > 2^n$  — монотонное возрастание функции  $\ln x$  вы без труда докажете сами).

Исследуем теперь поведение логарифма при  $x$ , близких к 0. Так как

$$\ln \frac{1}{2^n} = -\ln 2^n = -n \ln 2,$$

то при  $0 < x < \frac{1}{2^n}$  получаем  $\ln x < -n \ln 2$ , т. е. при достаточно малых  $x$  значение логарифма может быть сделано сколько угодно большим по модулю отрицательным числом.

Теперь мы можем нарисовать примерный график  $y = \ln x$  (рис. 7).

## 5. Экспонента

Можно доказать, что функция, изученная нами в предыдущих параграфах, принимает все действительные значения. При этом каждое значение принимается, конечно, ровно один раз, т. е. при любом  $x$  имеет единственное решение. Для числа  $y$ , являющегося решением этого уравнения, принято обозначение

$$y = \exp x.$$

Получившаяся новая функция  $x \rightarrow \exp x$ , обратная к функции  $x \rightarrow \ln x$ , называется экспонентой.

Заметим, что по определению экспоненты справедливо равенство

$$\exp (\ln x) = \ln (\exp x) = x. \quad (6)$$

График  $y = \exp x$  симметричен графику  $y = \ln x$  относительно прямой  $y = x$ . В самом деле, поскольку  $y = \exp x$  равносильно  $\ln y = x$ , то график экспоненты получается из графика логарифма преобразованием плоскости, при котором точка  $(x, y)$  переходит в точку  $(y, x)$ , а это преобразование — симметрия относительно прямой  $y = x$  (рис. 8\*).

Таким образом, экспонента — возрастающая функция, определенная на всей числовой прямой  $-\infty < x < +\infty$  и принимающая положительные значения. Кроме того, экспонента принимает сколь угодно большие значения при неограниченном возрастании  $x$  и стремится к нулю при  $x$ , стремящемся к  $-\infty$ .

---

<sup>3</sup> Для того чтобы убедиться в правильности этого рисунка, вам следует доказать, что  $\ln x < x$  при всех  $x > 0$ .

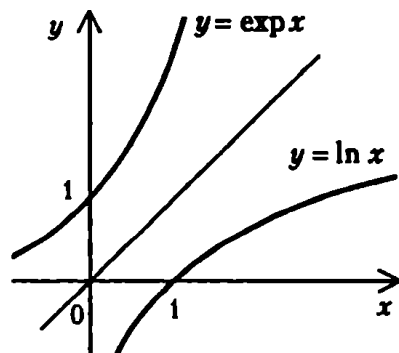


Рис. 8

## 6. Основное свойство экспоненты

Это свойство выражается следующей формулой:

$$\exp(x_1 + x_2) = \exp x_1 \cdot \exp x_2. \quad (7)$$

Для его доказательства воспользуемся основным свойством натурального логарифма и соотношением (6). Так как  $\ln y_1 y_2 = \ln y_1 + \ln y_2$ , то для  $y_1 = \exp x_1$  и  $y_2 = \exp x_2$  получаем  $\ln y_1 y_2 = x_1 + x_2$ , т. е.  $y_1 \cdot y_2 = \exp(x_1 + x_2)$  или  $\exp x_1 \cdot \exp x_2 = \exp(x_1 + x_2)$ . Из основного свойства  $\exp$  (или из соответствующих свойств функции  $\ln$ ) легко вывести, что

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$$

и

$$\exp(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \exp x_1 \cdot \exp x_2 \cdot \dots \cdot \exp x_n,$$

Обозначим число  $\exp 1$  через  $e$ . Другими словами,  $e$  — это решение уравнения  $\ln e = 1$ .

Пользуясь основным свойством экспоненты, мы докажем, что для рациональных  $x = \frac{m}{n}$   $\exp x = e^x$ . Прежде всего при натуральном  $m$

$$\exp m = \exp(1 + 1 + \dots + 1) = \exp 1 \cdot \exp 1 \cdot \dots \cdot \exp 1 = e^m$$

и

$$\exp(-m) = \frac{1}{\exp m} = \frac{1}{e^m} = e^{-m}.$$

Итак,  $\exp m = e^m$  при любом целом  $m$ .

Кроме того, при натуральном  $n$

$$\left(\exp \frac{1}{n}\right)^n = \exp \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \exp 1 = e.$$

т. е.

$$\exp \frac{1}{n} = \sqrt[n]{e}.$$

Для произвольного рационального  $x = \frac{m}{n}$  (где  $n > 0$ ,  $m$  и  $n$  — целые) получаем

$$\exp \frac{m}{n} = \left(\exp \frac{1}{n}\right)^m = (\sqrt[n]{e})^m = e^{\frac{m}{n}}.$$

т. е.  $\exp x = e^x$  при любом рациональном  $x$ .

Если же  $\alpha$  — иррациональное число, то формулу  $e^\alpha = \exp \alpha$  удобнее всего считать определением степени числа  $e$  с показателем  $\alpha$ .

Таким образом, для всех  $x$

$$\exp x = e^x. \quad (8)$$

Из последнего равенства и соотношения (6) следует, что логарифм данного положительного числа  $x$  — это показатель степени, в которую нужно возвести число  $e$ , чтобы получить число  $x$ :

$$e^{\ln x} = \exp \ln x = x.$$

## 7. Показательные функции и логарифмы с произвольным основанием

Теперь мы можем определить  $y = a^x$  при любом  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , и любом  $x$ , положив

$$a^x = \exp (x \ln a) = e^{x \ln a},$$

а также логарифм числа  $x > 0$  по основанию  $a$ , положив

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Легко убедиться в том, что для этих функций выполнены те же основные свойства:

$$a^{x_1 + x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}, \quad \log_a x_1 x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

(при  $x_1 > 0$ ,  $x_2 > 0$ ) и

$$a^{\log_a x} = x.$$

Мы предлагаем читателю самостоятельно убедиться в том, что эти определения совпадают с традиционными. Но в дальнейшем мы будем заниматься такими свойствами логарифмов и экспоненты, где существенно, что в роли основания берется именно число  $e$ , а не какое-то другое.

## 8. Производная показательной функции и логарифма

До сих пор мы говорили о свойствах логарифмов и показательных функций, которые известны из школьного курса. Сейчас речь пойдет о таких свойствах, которые связаны со скоростью изменения этих функций и которые особенно важны для приложения в физике.

Начнем с некоторых определений. Приращением  $\Delta f$  функции  $x \rightarrow f(x)$  на отрезке  $[x_0; x_1]$  называется разность  $\Delta f = f(x_1) - f(x_0)$ , приращением аргумента — разность  $\Delta x = x_1 - x_0$ . Отношение  $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$  естественно называть средней скоростью изменения функции  $x \rightarrow f(x)$  на отрезке  $[x_0; x_1]$  (если  $x$  — время, а  $f(x)$  — путь, пройденный движущимся телом к моменту  $x$ , то  $\frac{\Delta f}{\Delta x}$  — средняя скорость движения за промежуток времени от  $x_0$  до  $x_1$ ). Пусть теперь  $x_0$  фиксировано, а  $x_1$  приближается к  $x_0$ . Если при этом отношение  $\frac{\Delta f}{\Delta x}$  стремится к некоторому пределу, то это предельное значение — «мгновенная скорость» изменения функции в точке  $x_0$  — называется производной функции  $x \rightarrow f(x)$  в точке  $x_0$  и обозначается через  $f'(x_0)$ . Значение производной характеризует поведение функции вблизи точки  $x_0$ .

Производная имеет наглядный геометрический смысл. Пусть  $M_0$  — точка графика  $y = f(x)$ , соответствующая  $x = x_0$ , т. е.

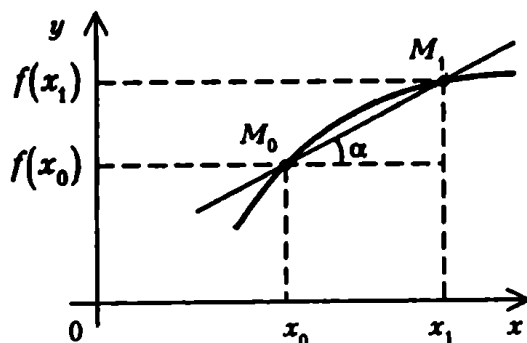


Рис. 9



точка с координатами  $(x_0, f(x_0))$ ,  $M_1$  — точка  $(x_1, f(x_1))$ . Проведем прямую  $M_0M_1$ . Угловым коэффициентом этой прямой, т. е. тангенсом угла ее наклона к оси  $Ox$  равен (рис. 9)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Когда точка  $x_1$  приближается к  $x_0$ , секущая стремится к предельному положению — к касательной, проведенной к кривой  $y = f(x)$  в точке  $x_0$ . Таким образом, значение производной при  $x = x_0$  равно угловому коэффициенту касательной к графику в точке  $(x_0, f(x_0))$ .

Попробуем вычислить производную для функции  $f(x) = \ln x$ . Ее приращение на отрезке  $[x_0, x_1]$  равно

$$\ln x_1 - \ln x_0 = \ln \frac{x_1}{x_0} = \ln \left( 1 + \frac{x_1 - x_0}{x_0} \right),$$

поэтому

$$\frac{\ln x_1 - \ln x_0}{x_1 - x_0} = \frac{1}{x_0} \cdot \frac{\ln(1+h)}{h}, \quad (9)$$

где

$$h = \frac{x_1 - x_0}{x_0}.$$

Когда  $x_1$  стремится к  $x_0$ , величина  $h$  стремится к 0. Таким образом, остается выяснить, как ведет себя отношение  $\frac{\ln(1+h)}{h}$  при малых  $h$ .

Из нашего определения логарифма, как мы вскоре увидим, легко получаются оценки, из которых следует, что при приближении  $h$  к нулю величина  $\frac{\ln(1+h)}{h}$  приближается к 1, т. е.

$$\ln(1+h) \approx h \quad (\text{при малых } h). \quad (10)$$

Эту очень важную для приближенных расчетов формулу можно переписать еще так:

$$\exp h \approx 1 + h \quad (\text{при малых } h). \quad (11)$$

Отсюда мы получим основные формулы для производной логарифма и экспоненты:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (12)$$

и

$$(\exp x)' = \exp x. \quad (13)$$

## 9. Оценки натурального логарифма вблизи единицы

Вот одно из основных свойств логарифма:

$$x - \frac{x^2}{x+1} = \frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x. \quad (14)$$

Для доказательства этих неравенств при  $x > 0$  достаточно сравнить площадь криволинейной трапеции  $ABCD$  с площадями прямоугольников  $AD'CB$  и  $ADC'B$  (рис. 10). Действительно, площадь криволинейной трапеции равна  $\ln(1+x)$ , площадь  $AD'CB$  равна  $AB \cdot BC = x \cdot \frac{1}{x+1}$ , площадь  $ADC'B$  равна  $AB \cdot AD = x \cdot 1 = x$ .

При  $-1 < x < 0$  доказательство проведите сами.

Неравенства (14) позволяют оценить среднюю скорость изменения логарифма (9) так ( $x_1 > x_0$ ):

$$\frac{1}{x_1} < \frac{\ln x_1 - \ln x_0}{x_1 - x_0} = \frac{\ln\left(1 + \frac{x_1 - x_0}{x_0}\right)}{x_1 - x_0} < \frac{1}{x_0}.$$

Поэтому при  $x_1$ , стремящемся к  $x_0$ , средняя скорость стремится к  $\frac{1}{x_0}$ . Тем самым формула (12) для производной логарифма доказана. Итак, мы доказали существование касательной к графику функции  $y = \ln x$  в каждой его точке и обнаружили, что при  $x = x_0$  тангенс угла наклона касательной равен  $\frac{1}{x_0}$ .

Для нахождения углового коэффициента касательной к графику экспоненты воспользуемся тем, что этот график получается из графика логарифма симметрией относительно прямой  $y = x$ . Из рисунка 11 видно, что  $\alpha_0 + \beta_0 = \frac{\pi}{2}$ , а так как  $\alpha_0$  — угол

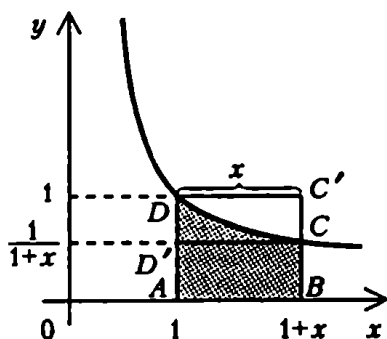


Рис. 10

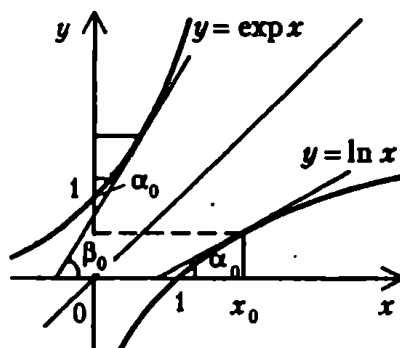


Рис. 11

наклона касательной к графику логарифма в точке  $x_0, y_0$ ,  
то  $\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{1}{x_0}$ .

Окончательно получаем

$$\operatorname{tg} \beta_0 = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \alpha_0 \right) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_0} = x_0 = e^{\beta_0},$$

т. е. угловой коэффициент касательной к графику экспоненты при любом  $x$  равен значению экспоненты в точке  $x$ . Тем самым мы доказали и формулу (13).

В случае произвольных оснований без труда получим, что

$$(\log_a x)' = \frac{a}{x \ln a}, \quad (12')$$

$$(a^x)' = a^x \ln a. \quad (13')$$

Подчеркнем, что обе эти формулы справедливы именно для натуральных логарифмов и показательной функции с основанием  $e$ . Для других показательных функций скорость изменения в точке не равна, а лишь пропорциональна значению в точке  $x_0$  (см. задачу 8).

Вернемся еще раз к неравенству (14). Из него сразу же вытекают приближенное равенство (10) и эквивалентное ему (11): ведь при  $|x| \ll 1$  величина  $x^2$  значительно меньше  $x$  (например, при  $|h| < 0,1$  относительная погрешность формул (10) и (11) не превышает 1 % т. е. отношение левой части к правой отличается от 1 не более чем на одну сотую).

Из этого же неравенства (14) нетрудно вывести замечательную формулу для числа  $e$ :

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

и более общую формулу для экспоненты

$$\exp x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{x}{n} \right)^n \quad (15)$$

(см. задачу 1).

## 10. Разложение экспоненты в ряд

Формула (15) предыдущего пункта неудобна для вычислений, так как для обеспечения достаточной точности приходится брать очень большие значения  $n$ . Здесь мы выведем другое

выражение для экспоненты, представив ее в виде суммы бесконечного ряда слагаемых

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{x^k}{1 \cdot 2 \dots k} + \dots \quad (16)$$

подобно тому, как бесконечная геометрическая прогрессия  $1 + x + x^2 + \dots$  представляет при  $|x| < 1$  функцию  $y = \frac{1}{1-x}$ .

Такое представление удобно по двум причинам. Во-первых, для вычисления экспоненты с высокой точностью (например, при составлении таблиц) по формуле  $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$  хватает сравнительно небольшого числа слагаемых и, во-вторых, это разложение позволяет глубже изучить экспоненту (например, доказать иррациональность числа  $e$  (см. задачи 11, 12)).

Мы ограничимся доказательством формулы (16) при  $x > 0$ .

Итак, пусть  $T_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$  и  $S_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ .

Мы должны доказать, что

$$\lim S_n(x) = \exp x.$$

По формуле бинома получаем

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &= 1 + n \cdot \frac{x}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{x^2}{n^2} + \dots \\ &\dots + \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k)}{k!} \cdot \frac{x^k}{n^k} + \dots + \frac{x^n}{n^n} = 1 + x + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots \\ &\dots + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{k!} x^k + \dots + \frac{x^n}{n^n}. \end{aligned}$$

Числа, стоящие в правой части этого равенства в круглых скобках, все меньше единицы. Если их заменить единицами, то правая часть увеличится, так что

$$T_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < S(n). \quad (17)$$

С другой стороны, отбрасывая в правой части неравенства все слагаемые, кроме  $k$  первых, получим

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n > 1 + x + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{x^2}{2!} + \dots + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{x^k}{k!}.$$

При  $k$  постоянном и  $n$ , стремящемся к  $\infty$ , правая часть этого неравенства стремится к  $S_k(x)$ , поскольку каждый из сомножителей в круглых скобках стремится к 1, а так как  $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$  стремится к  $\exp x$ , то

$$\exp x > S_k(x)$$

при любом  $k$ , т. е. последовательность  $S_k(x)$  ограничена, и (при  $x > 0$ ) возрастает. Следовательно, она имеет предел, причем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots \leq \exp x.$$

Кроме того, из неравенства (17) получаем, переходя к пределу при  $n$ , стремящемся к  $\infty$ , что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) \geq \exp x.$$

Итак,

$$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

## Задачи

1. а) Докажите неравенства

$$\frac{nx}{n+x} < n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) < x$$

( $x > -n$ ;  $n$  — натуральное).

б) Выведите из этих неравенств формулу

$$\exp x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

2. Найдите пределы:

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$ ;

б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n}$ ;

в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n}$ ;

г)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\sqrt[n]{n}}$ .

3. Найдите площади криволинейных трапеций для функций

$$y = a^x \text{ и } y = \log_a x.$$

4. Найдите пределы:

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right);$

б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+x} + \frac{1}{n+2x} + \dots + \frac{1}{n+nx} \right).$

5. Докажите, что

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < \ln n < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

6. Докажите, что последовательность

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)$$

имеет предел.

7. Докажите, что

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2.$$

8. Найдите угловые коэффициенты касательных к кривым  $y = a^x$  и  $y = \log_a x$ .

9. Найдите предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n (\sqrt[n]{n} - 1).$$

10. Используя геометрическое определение логарифма, докажите при  $x > 0$  неравенства

$$\frac{2x}{2+x} < \ln(1+x) < \frac{x(x+2)}{2(x+1)}.$$

выведите отсюда, что

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + x^3.$$

11. Докажите, что

$$0 < e^x - \left( 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right) < \frac{x^n e^x}{(n+1)!}$$

при  $x > 0$ .

12. Пользуясь неравенствами предыдущей задачи, докажите, что число  $e$  а) иррационально; б) не является корнем никакого квадратного уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$  с целыми коэффициентами ( $a > 0$ ).

# СОДЕРЖАНИЕ

## ПРЕДИСЛОВИЕ

<i>Виленкин Н.</i> КАК ВОЗНИКЛО И РАЗВИВАЛОСЬ ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ	4
<i>Хинчин А.</i> ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ	13
<i>Смоляков Л.</i> О ТЕОРЕМЕ ЛАГРАНЖА	18
<i>Соловьев Ю.</i> ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ	20
<i>Соловьев Ю.</i> НЕРАВЕНСТВО КОШИ	32
<i>Земляков А.</i> ОСТОРОЖНО, МАКСИМУМ!	35
<i>Земляков А.</i> ЧЕТНЫЕ И НЕЧЕТНЫЕ ФУНКЦИИ	43
<i>Земляков А., Ивлев Б.</i> ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ	52
<i>Звонкин А.</i> АНАЛИЗ ПОМОГАЕТ АЛГЕБРЕ	64
<i>Балк М., Ломакин Ю.</i> ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ	71
<i>Ивашев-Мусатов О.</i> ПРОИЗВОДНАЯ ЛОГАРИФМА	76

<i>Виленкин А., Ионин Ю.</i> ПЛОЩАДЬ И ИНТЕГРАЛ	82
<i>Самаров К., Шабунин М.</i> ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ	93
<i>Гордин Р.</i> ЧТО ТАКОЕ СТЕПЕНЬ?	104
<i>Егоров А.</i> ПЛОЩАДЬ ПОД ГИПЕРБОЛОЙ, ЛОГАРИФМ И ЭКСПОНЕНТА	110



# **ШКОЛА В «КВАНТЕ»**

## **Алгебра и анализ**

Под редакцией А. А. Егорова

Приложение к журналу «Квант» № 4/94

Редактор А. Ю. Котова

Литературный редактор Л. В. Кардасевич

Художник С. А. Стулов

Технический редактор Е. С. Потапенкова

ИБ № 6

103006 Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская,  
2/1, «Квант»

250-33-54

Формат 84×198 1/32. Бумага офсетная № 1.

Гарнитура литературная. Печать офсетная.

Усл. печ. лист. 6,72. Тираж 15 000 экз.

Заказ 3165. Цена договорная.

Набрано на Ордена Трудового Красного Знамени

Чеховском полиграфическом комбинате

Комитета Российской Федерации по печати

142300. г. Чехов Московской области